2021 年度　旭川医科大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　$a>0$ とし，$f(x)=x^3-3a^2x$ とおく。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　曲線 $y=f(x)$ が直線 $y=-1$ に接するように定数 a の値を求めよ。また，このとき，$-1<f(1)<0$ であることを示せ。

(2)　4 点 $(1,\ 1)$，$(1,\ -1)$，$(-1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$ を頂点とする正方形の周を K とする。曲線 $y=f(x)$ と K との共有点の個数が，ちょうど 6 個となる定数 a の値の範囲を求めよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ の区間 $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値を m とする。a がすべての正の値をとって変化するとき，a の値を横軸に m の値を縦軸にとって m のグラフの概形をかけ。また，m の最小値とそのときの a の値を求めよ。

2　投げたときに表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨がある。この硬貨を同時に 2 枚投げて，表が出た枚数に応じて数直線上の点 P を正の方向へ動かす。2 枚とも表が出たら 2 だけ移動し，1 枚だけ表が出たら 1 だけ移動するものとし，2 枚とも裏が出たら移動しないものとする。点 P の出発点を原点として，この試行を n 回くり返したとき，点 P の座標を 3 で割った余りが 0 である確率を a_n，1 である確率を b_n，2 である確率を c_n とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　a_1，b_1，c_1，a_2，b_2，c_2 をそれぞれ求めよ。

(2)　$n\geqq 1$ のとき，a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} をそれぞれ a_n，b_n，c_n を用いて表せ。

(3)　漸化式 $x_{n+1}=\dfrac{1+x_n}{4}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たす数列 $\{x_n\}$ の一般項を x_1 を用いて表せ。

(4)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

3　$p=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ とし，$f(x)=x^p\sqrt{x}$　$(x\geqq 0)$ とおく。このとき，次の各問いに答えよ。$p=0$ のとき，$f(x)=\sqrt{x}$ とする。

(1)　$0\leqq x<x'$ のとき，$f(x)<f(x')$ であることを示せ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $x=a$，直線 $x=b$ および x 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよ。ただし，$0\leqq a<b$ とする。

(3)　次の不等式を証明せよ。ただし，n は正の整数とする。

$$\frac{2}{2p+3}n^{p+1}\sqrt{n}<\sum_{k=1}^{n}k^p\sqrt{k}<\frac{2}{2p+3}(n+1)^{p+1}\sqrt{n+1}$$

4　O を原点とする座標空間に，3 点 $\mathrm{A}(1,\ -2,\ 2)$，$\mathrm{B}(-1,\ -3,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ 0,\ 4)$ がある。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　△ABC の面積を求めよ。

(2)　3 点 A，B，C を含む平面に O から垂線 OH を下ろす。このとき，点 H の座標を求めよ。

(3)　△ABC の外接円を K とする。

　(i)　K の中心 J の座標を求めよ。

　(ii)　点 P が K 上を動くとき，OP^2 の最大値を求めよ。

2021 年度　旭川医科大学（前期）

医学部（略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$，証明は省略

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}<a<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

(3) $m=\begin{cases} 1-3a^2 & \left(0<a\leqq\frac{1}{2}\right) \\ 2a^3 & \left(\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1\right) \\ 3a^2-1 & (a\geqq 1) \end{cases}$，図示は省略，$m$ の最小値：$\frac{1}{4}$ $\left(a=\frac{1}{2}\right)$

2

(1) $a_1=\frac{1}{4}$，$b_1=\frac{1}{2}$，$c_1=\frac{1}{4}$，$a_2=\frac{5}{16}$，$b_2=\frac{5}{16}$，$c_2=\frac{3}{8}$

(2) $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{2}c_n$，$b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{4}c_n$，$c_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{4}c_n$

(3) $x_n=\frac{1}{3}+\left(x_1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

(4) $a_n=\begin{cases} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n & (n\text{ は 3 の倍数}) \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n & (n\text{ は 3 の倍数でない}) \end{cases}$

3

(1) 証明は省略

(2) $S=\frac{2}{2p+3}\left(b^{p+\frac{3}{2}}-a^{p+\frac{3}{2}}\right)$

(3) 証明は省略

4

(1) $3\sqrt{2}$

(2) $\mathrm{H}(0,\ -2,\ 2)$

(3) (i) $\mathrm{J}\left(-1,\ -\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$　(ii) 最大値：$14+3\sqrt{3}$