

2021 年度 大阪市立大学（前期）**医学部**

試験時間：120 分

 全問必答**1** 区間 $0 \leq x \leq 1$ 上の連続関数 $f(x)$ と自然数 n に対し

$$I_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

とおく。また

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(I_n - \int_0^1 f(x) dx \right)$$

とおく。次の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = x^2$ のとき D の値を求めよ。
- (2) $f(x) = x^3$ のとき D の値を求めよ。
- (3) $f(x) = e^x$ のとき D の値を求めよ。ただし、 $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + a_n$ とおくとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = \frac{1}{2}$ となることを用いてよい。

2 n を 3 以上の自然数とする。単位円に内接する正 n 角形の面積を A_n 、この正 n 角形の各辺の中点を順に結んでできる正 n 角形の面積を B_n で表すとき、次の問いに答えよ。

- (1) A_n を n を用いて表せ。
- (2) B_n を n を用いて表せ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ を求めよ。
- (4) $n \geq 32$ のとき、不等式 $\frac{B_n}{A_n} > \frac{99}{100}$ が成り立つことを示せ。

3 xyz 空間の中で、方程式 $y = \frac{1}{2}(x^2 + z^2)$ で表される図形は、放物線を y 軸のまわりに回転して得られる曲面である。これを S とする。また、方程式 $y = x + \frac{1}{2}$ で表される図形は、 xz 平面と 45 度の角度で交わる平面である。これを H とする。さらに、 S と H が囲む部分を K とおくと、 K は不等式

$$\frac{1}{2}(x^2 + z^2) \leq y \leq x + \frac{1}{2}$$

をみたす点 (x, y, z) の全体となる。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) K を平面 $z = t$ で切ったときの切り口が空集合ではないような実数 t の範囲を求めよ。
- (2) (1) の切り口の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。
- (3) K の体積を求めよ。

4 n 個の球の入った箱から球を一つずつ取り出して元に戻す操作を k 回繰り返す。ただし $k \leq n$ とする。各回について、どの球が取り出されるかは同様に確からしいとする。取り出した k 個の球がすべて相異なる確率を $P(n, k)$ とおくと、次の問いに答えよ。

(1) $P(n, k)$ を n と k を用いて表せ。

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} (P(n, k))^n$ を $Q(k)$ とおくと、 $Q(k)$ を k を用いて表せ。ただし公式 $\lim_{x \rightarrow +0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}$ を用いてもよい。

(3) 無限級数

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\log Q(k)}$$

の値を求めよ。ただし $\log$ は自然対数を表す。

2021 年度 大阪市立大学（前期）

医学部

（略解）

 証明，図示などは省略**1**

(1) $\frac{1}{2}$

(2) $\frac{1}{2}$

(3) $\frac{e-1}{2}$

2

(1) $A_n = \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$

(3) π

(2) $B_n = \frac{n}{2} \cos^2 \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n}$

(4) 証明は省略

3

(1) $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

(2) $S(t) = \frac{2}{3}(2-t^2)^{\frac{3}{2}}$

(3) π

4

(1) $P(n, k) = \frac{n!}{n^k(n-k)!}$

(2) $Q(k) = e^{-\frac{k(k-1)}{2}}$

(3) -2