2021 年度　大阪大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　a，b を $ab<1$ をみたす正の実数とする。xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から，曲線 $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ に 2 本の接線を引き，その接点を $\mathrm{Q}\left(s,\ \dfrac{1}{s}\right)$，$\mathrm{R}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ とする。ただし，$s<t$ とする。

(1)　s および t を a，b を用いて表せ。

(2)　点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ が曲線 $y=\dfrac{9}{4}-3x^2$ 上の $x>0$，$y>0$ をみたす部分を動くとき，$\dfrac{t}{s}$ の最小値とそのときの a，b の値を求めよ。

2　空間内に，同一平面上にない 4 点 O，A，B，C がある。s，t を $0<s<1$，$0<t<1$ をみたす実数とする。線分 OA を 1：1 に内分する点を $\mathrm{A_0}$，線分 OB を 1：2 に内分する点を $\mathrm{B_0}$，線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。さらに，4 点 $\mathrm{A_0}$，$\mathrm{B_0}$，P，Q が同一平面上にあるとする。

(1)　t を s を用いて表せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2$，$\angle\mathrm{AOB}=120^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=60^\circ$，$\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ であるとき，s の値を求めよ。

3　n を自然数とし，t を $t\geqq 1$ をみたす実数とする。

(1)　$x\geqq t$ のとき，不等式

$$-\frac{(x-t)^2}{2}\leqq \log x-\log t-\frac{1}{t}(x-t)\leqq 0$$

が成り立つことを示せ。

(2)　不等式

$$-\frac{1}{6n^3}\leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}}\log x\,dx-\frac{1}{n}\log t-\frac{1}{2tn^2}\leqq 0$$

が成り立つことを示せ。

(3)　$a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$ とおく。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-pn)=q$ をみたすような実数 p，q の値を求めよ。

4　整数 a，b，c に関する次の条件 $(*)$ を考える。

$$\int_a^c(x^2+bx)\,dx=\int_b^c(x^2+ax)\,dx\ \cdots\cdots\ (*)$$

(1)　整数 a，b，c が $(*)$ および $a\neq b$ をみたすとき，c は 3 の倍数であることを示せ。

(2)　$c=3600$ のとき，$(*)$ および $a<b$ をみたす整数の組 $(a,\ b)$ の個数を求めよ。

5　次の問いに答えよ。

(1)　a を実数とする。x についての方程式 $x - \tan x = a$ の実数解のうち，$|x| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたすものがちょうど 1 個あることを示せ。

(2)　自然数 n に対し，$x - \tan x = n\pi$ かつ $|x| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数 x を x_n とおく。t を $|t| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とする。このとき，曲線 $C : y = \sin x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ における接線が，不等式 $x \geqq \dfrac{\pi}{2}$ の表す領域に含まれる点においても曲線 C と接するための必要十分条件は，t が x_1，x_2，x_3，$\cdots$ のいずれかと等しいことであることを示せ。

2021 年度　大阪大学（前期）

医学部　（略解）

✎ 証明，図示などは省略

1

(1)　$s=\dfrac{1-\sqrt{1-ab}}{b}$，$t=\dfrac{1+\sqrt{1-ab}}{b}$

(2)　最小値：3，$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{3}{2}$

2

(1)　$t=\dfrac{2s}{s+1}$

(2)　$s=\dfrac{1}{5}$

3

(1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　$p=2\log 2-1$，$q=-\dfrac{1}{2}\log 2$

4

(1)　証明は省略

(2)　180 個

5

(1)　証明は省略

(2)　証明は省略