

2021 年度 北海道大学（前期）

医学部

試験時間：120 分

全問必答

1 三角形 OAB において、辺 AB を 2:1 に内分する点を D とし、直線 OA に関して点 D と対称な点を E とする。 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とし、 $|\vec{a}| = 4$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ を満たすとする。

(1) 点 B から直線 OA に下した垂線と直線 OA との交点を F とする。 $\vec{OF}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(2) $\vec{OE}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 三角形 BDE の面積が $\frac{5}{9}$ になるとき、 $|\vec{b}|$ の値を求めよ。

2 a を $a \neq -3$ を満たす定数とする。放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上の点 $A(-1, \frac{1}{2})$ における接線を ℓ_1 、点 $B(a+2, \frac{(a+2)^2}{2})$ における接線を ℓ_2 とする。 ℓ_1 と ℓ_2 の交点を C とおく。

(1) C の座標を a を用いて表せ。

(2) a が $a > 0$ を満たしながら動くとき、 $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|}$ が最小となるとき a の値を求めよ。ただし、 $|\overline{AB}|$ および $|\overline{BC}|$ はそれぞれ線分 AB と線分 BC の長さを表す。

3 正の実数 x, y が、方程式

$$\frac{9^{4x} + 9^{y^2+1}}{6} = 3^{4x+y^2} \quad \dots\dots (\star)$$

を満たすとする。

(1) y^2 を x を用いて表せ。

(2) 正の実数 x, y が $(\star)$ および $1 - \frac{x}{y} > 0$ を満たしながら動くとき、

$$\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}} 4} + \frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}} 4}$$

の最大値を求めよ。

4 $a_1 = 2$, $b_1 = 1$ および

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められた数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。 $c_n = a_nb_n$ とおく。

(1) c_2 を求めよ。

(2) c_n は偶数であることを示せ。

(3) n が偶数のとき、 c_n は 28 で割り切れることを示せ。

5 座標平面上で，媒介変数 θ を用いて

$$x = (1 + \cos \theta) \cos \theta, \quad y = \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

と表される曲線 C がある。 C 上の点で x 座標の値が最小になる点を A とし， A の x 座標の値を a とおく。 B を点 $(a, 0)$ ， O を原点 $(0, 0)$ とする。

- (1) a を求めよ。
- (2) 線分 AB と線分 OB と C で囲まれた部分の面積を求めよ。

2021 年度 北海道大学（前期）**医学部**

（略解）



証明，図示などは省略

1

(1) $\overrightarrow{OF} = \frac{3}{8} \vec{a}$

(2) $\overrightarrow{OE} = \frac{5}{6} \vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b}$

(3) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

2

(1) $C\left(\frac{a+1}{2}, -\frac{a+2}{2}\right)$

(2) $a = \sqrt{5}$

3

(1) $y^2 = 4x - 1$

(2) 最大値 : $\log_4 \frac{3}{4}$

4

(1) $c_2 = 28$

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

5

(1) $a = -\frac{1}{4}$

(2) $\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}$