

2021 年度 九州大学（前期）**医学部**

試験時間：150 分

 全問必答

1 座標空間内の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 2)$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 四面体 $OABC$ に内接する球の中心の座標を求めよ。
- (2) 中心の x 座標, y 座標, z 座標がすべて正の実数であり, xy 平面, yz 平面, zx 平面のすべてと接する球を考える。この球が平面 ABC と交わる時, その交わりとしてできる円の面積の最大値を求めよ。

2 θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ をみたす定数とし, x の 2 次方程式

$$x^2 - (4\cos\theta)x + \frac{1}{\tan\theta} = 0 \cdots \cdots (*)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 2 次方程式 $(*)$ が実数解をもたないような θ の値の範囲を求めよ。
- (2) θ が (1) で求めた範囲にあるとし, $(*)$ の 2 つの虚数解を α, β とする。ただし, α の虚部は β の虚部より大きいとする。複素数平面上の 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $O(0)$ を通る円の中心を $C(\gamma)$ とするとき, θ を用いて γ を表せ。
- (3) 点 O, A, C を (2) のように定めるとき, 三角形 OAC が直角三角形になるような θ に対する $\tan\theta$ の値を求めよ。

3 座標平面上の点 (x, y) について, 次の条件を考える。

条件: すべての実数 t に対して $y \leq e^t - xt$ が成立する。 $\cdots \cdots (*)$

以下の問いに答えよ。必要ならば $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ を使ってよい。

- (1) 条件 $(*)$ をみたす点 (x, y) 全体の集合を座標平面上に図示せよ。
- (2) 条件 $(*)$ をみたす点 (x, y) のうち, $x \geq 1$ かつ $y \geq 0$ をみたすものの全体の集合を S とする。 S を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

4 自然数 n と実数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ($a_n \neq 0$) に対して, 2 つの整式

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

を考える。 α, β を異なる複素数とする。複素数平面上の 2 点 α, β を結ぶ線分上にある点 γ で,

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\gamma)$$

をみたすものが存在するとき,

$\alpha, \beta, f(x)$ は平均値の性質をもつ

ということにする。以下の問いに答えよ。ただし, i は虚数単位とする。

- (1) $n = 2$ のとき, どのような $\alpha, \beta, f(x)$ も平均値の性質をもつことを示せ。
- (2) $\alpha = 1 - i, \beta = 1 + i, f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が平均値の性質をもつための, 実数 a, b, c に関する必要十分条件を求めよ。
- (3) $\alpha = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \beta = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, f(x) = x^7$ は, 平均値の性質をもたないことを示せ。

5 以下の問いに答えよ。

- (1) 自然数 n, k が $2 \leq k \leq n-2$ をみたすとき, ${}_nC_k > n$ であることを示せ。
- (2) p を素数とする。 $k \leq n$ をみたす自然数の組 (n, k) で ${}_nC_k = p$ となるものをすべて求めよ。

2021 年度 九州大学 (前期)

医学部

(略解)

 証明, 図示などは省略**1**

(1) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

(2) 最大値: $\frac{\pi}{4}$

2

(1) $0 < \theta < \frac{\pi}{12}$

(2) $r = \frac{1}{4 \sin \theta}$

(3) $\tan \theta = 4 - \sqrt{15}$

3

(1) 図示は省略

(2) $\frac{\pi}{27}(2e^3 - 17)$

4

(1) 証明は省略

(2) $a = -3$ かつ b, c は任意の実数

(3) 証明は省略

5

(1) 証明は省略

(2) $(n, k) = (p, 1), (p, p-1)$