2020 年度　群馬大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　p，q を実数の定数とする。3 次方程式 $x^3+px^2+qx+1=0$ が虚数解 α と $\dfrac{1}{\alpha}$ をもつとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$p=q$ が成り立つことを示せ。

(2)　定数 p の値の範囲を求めよ。

(3)　α の実部 s，虚部 t について $s+2t=-1$ が成り立つときの p の値を求めよ。

2　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は次の条件によって定められている。

すべての自然数 n に対して a_n，b_n はともに整数で，$(3+2\sqrt{2})^n=a_n+\sqrt{2}b_n$

このとき以下の問いに答えよ。

(1)　すべての自然数 n について ${a_n}^2-2{b_n}^2=1$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ を求めよ。

3　四面体 OABC は次の 2 条件を満たすとする。

1. $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$
2. $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=60^\circ$

辺 BC を 1：2 に内分する点を M，辺 AC を $t:(1-t)$ に内分する点を N とおき，線分 AM と線分 BN との交点を P とおく。ただし，t は $0<t<1$ を満たす実数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ および t を用いて表せ。

(2)　線分 OP の長さを最小にする t の値を求めよ。

4　a を正の定数，e を自然対数の底とし，$f(x)=\{x^2-(a+1)x+2a-1\}e^{-x}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ のとき，不等式 $e^x>\dfrac{x^3}{6}$ が成り立つことを証明せよ。ただし，$x>0$ のとき不等式 $e^x>x$ が成り立つことを用いてよいとする。

(2)　関数 $f(x)$ が $x\geqq 0$ において最小値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

(3)　$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，定積分 $\displaystyle\int_0^1\left|f(x)\right|dx$ を求めよ。

5　a，b は正の定数で $a>b$ とする。座標平面上に楕円 C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と楕円 C_2：$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ がある。直線 ℓ は楕円 C_1，C_2 のどちらにも第 1 象限で接するものとする。直線 ℓ の方程式を $y=mx+n$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　m と n を求めよ。

(2)　$a=\sqrt{3}$，$b=1$ とする。楕円 C_1 と直線 ℓ との接点の x 座標を d とおく。このとき 3 つの領域

$$y \geqq \sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2},\ \ \frac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq d,\ \ y \leqq mx+n$$

の共通部分の面積を求めよ。

2020 年度　群馬大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）証明は省略　（2）$-1<p<3$　（3）$p=-\dfrac{1}{5}$

2

（1）証明は省略

（2）$a_n=\dfrac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{2}$，$b_n=\dfrac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$

（3）$\sqrt{2}$

3

（1）$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2t}{2t+1}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{t}{2t+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　（2）$t=\dfrac{3}{10}$

4

（1）証明は省略　（2）$0<a\leqq 1$，$5\leqq a$　（3）$\dfrac{4-e}{2e}$

5

（1）$m=-1$，$n=\sqrt{a^2+b^2}$　（2）$\dfrac{9}{4}-\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi$