

2020 年度 筑波大学 (前期)

医学部

試験時間 : 120 分

全問必答

1 xy 平面上の 3 点 $A(0, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の内接円を T とする。点 $D(0, -1)$ を通り、傾きが正である直線を $l: y = ax - 1$ とする。

- (1) 円 T の半径を r とする。 r を求めよ。
- (2) 直線 l と円 $x^2 + y^2 = 1$ の交点のうち、 D と異なる点を E とする。点 E の座標を a を用いて表せ。
- (3) 直線 l が円 T に接するとする。このとき、(2) で求めた点 E を通り、 x 軸と平行な直線が、円 T に接することを示せ。

2 xy 平面において、円 $x^2 + y^2 = 1$ の $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ を満たす部分を C_1 とする。また、直線 $y = x$ の $x \leq 0$ を満たす部分を C_2 とする。 C_1 上の点 A , C_2 上の点 B および点 $P(-1, 0)$ について、 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ であるとする。点 A の座標を $(\cos \theta, \sin \theta)$ とする。ただし $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。

- (1) 点 B の x 座標を θ を用いて表せ。
- (2) 線分 AB の中点の x 座標が 0 以上であるような θ の範囲を求めよ。

3 O を原点とする xy 平面上に 2 直線

$$l: y = \sqrt{3}x, \quad m: y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

がある。正の整数 n に対して、 l 上に点 $P_n(n, \sqrt{3}n)$ をとり、 m 上に点 $Q_n\left(x_n, -\frac{1}{\sqrt{3}}x_n\right)$ をとる。ただし、 x_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) は次の条件 (I), (II) を満たすとする。

- (I) $x_1 = 1$ である。
- (II) $n \geq 2$ のとき、 x_n は、 Q_{n-1} を通り l と平行な直線と、 x 軸との交点の x 座標である。

また、正の整数 n に対して、 $\triangle OP_nQ_n$ の面積を a_n とする。

- (1) x_n を n を用いて表せ。
- (2) a_n を n を用いて表せ。
- (3) 正の整数 n に対して、 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ と定める。 S_n を n を用いて表せ。

4 関数 $f(\theta)$, $g(\theta)$ を

$$f(\theta) = \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad g(\theta) = \sin 2\theta$$

と定める。 xy 平面上の曲線 C が、媒介変数 θ を用いて

$$x = f(\theta), \quad y = g(\theta) \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

で表されている。

(1) 次の定積分 I_1 , I_2 , I_3 の値を求めよ。

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \, d\theta, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \cos 2\theta \, d\theta, \quad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \theta \cos 2\theta \, d\theta$$

(2) $\frac{dy}{dx}$ を θ の関数として表し、曲線 C の概形を xy 平面上に描け。

(3) 曲線 C , x 軸および y 軸で囲まれた図形を、 y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

5 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \frac{c}{1+c}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとす。ただし、 c は正の実数である。

(1) a_2 , a_3 を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$ を求めよ。

6 i は虚数単位とする。複素数 z に対して、その共役複素数を \bar{z} で表す。複素数平面上で、次の等式を満たす点 z の全体が表す図形を C とする。

$$z\bar{z} + (1+3i)z + (1-3i)\bar{z} + 9 = 0$$

以下の問いに答えよ。

(1) 図形 C を複素数平面上に描け。

(2) 複素数 w に対して、 $\alpha = w + \bar{w} - 1$, $\beta = w + \bar{w} + 1$ とする。 w , α , β が表す複素数平面上の点をそれぞれ P , A , B とする。点 P は C 上を動くとする。 $\triangle PAB$ の面積が最大となる複素数 w , およびそのときの $\triangle PAB$ の外接円の中心と半径を求めよ。

2020 年度 筑波大学 (前期)

医学部

(略解)

☞ 証明, 図示などは省略

1

(1) $r = \sqrt{2} - 1$

(2) $E\left(\frac{2a}{a^2+1}, \frac{a^2-1}{a^2+1}\right)$

(3) 証明は省略

2

(1) $-\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta+1}$

(2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

3

(1) $x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

(2) $a_n = \frac{2}{\sqrt{3}}n\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

(3) $S_n = 2\sqrt{3}(n-3)\left(\frac{4}{3}\right)^n + 6\sqrt{3}$

4

(1) $I_1 = \frac{1}{2}, I_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{3}, I_3 = \frac{4-\pi}{16}$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos 2\theta}{\cos\theta}$, 図示は省略

(3) $\frac{16\sqrt{2}-3\pi-8}{24}\pi$

5

(1) $a_2 = \frac{1+c}{2+c}, a_3 = \frac{2+c}{3+c}$

(3) $\frac{2c+1}{2c(c+1)}$

(2) $a_n = \frac{n+c-1}{n+c}$

6

(1) 図示は省略

(2) $w = -1 + 4i$, 中心 $-2 + 2i$, 半径 $\sqrt{5}$