2020 年度　熊本大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　xy 平面上において，媒介変数 $t\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$ によって

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = 1 - \cos 3t \end{cases}$$

と表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

(1)　C 上の点で x 座標が最大になる点 P と y 座標が最大になる点 Q の座標をそれぞれ求めよ。

(2)　C 上の点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ における接線の方程式を求めよ。

(3)　C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

2　α，β を複素数とし，複素数平面上の点 O(0)，A(α)，B(β)，C$(|\alpha|^2)$，D$(\overline{\alpha}\beta)$ を考える。3 点 O，A，B は三角形をなすとする。また，複素数 z に対し，$\mathrm{Im}(z)$ によって z の虚部を表すことにする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\triangle$OAB の面積を S_1，$\triangle$OCD の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(2)　$\triangle$OAB の面積 S_1 は $\dfrac{1}{2}\left|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)\right|$ で与えられることを示せ。

(3)　実数 a，b に対し，複素数 z を $z = a + bi$ で定める。$1 \leqq a \leqq 2$，$1 \leqq b \leqq 3$ のとき，3 点 O(0)，P(z)，Q$\left(\dfrac{1}{z}\right)$ を頂点とする $\triangle$OPQ の面積の最大値と最小値を求めよ。

3　以下の問いに答えよ。

(1)　x が自然数のとき，x^2 を 5 で割ったときの余りは 0，1，4 のいずれかであることを示せ。

(2)　$x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x，y，z の組は存在しないことを示せ。

4　xy 平面において，x，y がともに整数であるとき，点 $(x,\ y)$ を格子点とよぶ。2 以上の整数 n に対し，

$$0 < x < n, \quad 1 < 2^y < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

をたす格子点 $(x,\ y)$ の個数を $P(n)$ で表す。以下の問いに答えよ。

(1)　不等式

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\} \leqq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

を示せ。

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^2}$ を求めよ。

(3)　(2) で求めた極限値を L とする。不等式

$$L-\frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n}$$

を示せ。

2020 年度　熊本大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $\mathrm{P}(1,\ 1)$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 2\right)$　(2) $y=2\sqrt{3}x-\sqrt{3}+1$　(3) $\dfrac{9\sqrt{3}}{16}$

2

(1) $|\alpha|^2$　(2) 証明は省略　(3) 最大値 $\dfrac{1}{2}$，最小値 $\dfrac{3}{10}$

3

(1) 証明は省略　(2) 証明は省略

4

(1) 証明は省略　(2) $2-\dfrac{1}{\log 2}$　(3) 証明は省略