2020 年度　東北大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AC}=1$，$\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の頂点 B から辺 AC に下ろした垂線と辺 AC との交点を H とする。

(1)　$\angle\mathrm{BAC}$ を θ と表すとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

(2)　実数 s は $0<s<1$ の範囲を動くとする。辺 BH を $s:(1-s)$ に内分する点を P とするとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値およびそのときの s の値を求めよ。

2　a を 0 でない実数とする。xy 平面において，円 $C: x^2-2ax+y^2-4y+4=0$，直線 $L: -4x+3y+a=0$，直線 $M: 3x+4y-7a=0$ を考える。

(1)　L と M の交点が C 上にあるような a の値を求めよ。

(2)　C と L が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3)　集合 $\{\mathrm{P}\mid$ 点 P は C と L の共有点 $\}\cup\{\mathrm{P}\mid$ 点 P は C と M の共有点 $\}$ の要素の個数が 3 となるような a の値をすべて求めよ。

3　n を正の整数，a，b を 0 以上の整数とする。

(1)　$n\geqq 3$ のとき不等式 $2^n+n^2+8<3^n$ が成り立つことを示せ。

(2)　不等式 $2^n+n^2+8\geqq 3^n$ を満たす n をすべて求めよ。

(3)　等式 $2^n+n^2+8=3^n+an+b$ を満たす a，b，n の組 (a,b,n) をすべて求めよ。

4　白玉 3 個，赤玉 2 個の合計 5 個の玉が入った箱と硬貨がある。箱から無作為に玉を 1 個取り出し，硬貨を投げて表が出たら，その玉を手元に残し，裏が出たら箱に戻す試行を行う。試行後に箱の中の玉がなくなったら試行は停止する。また，最初手元に玉はないものとする。

(1)　2 回の試行の結果，手元に白玉が 2 個ある確率を求めよ。

(2)　3 回の試行の結果，手元の玉が白玉 1 個，赤玉 1 個の計 2 個となる確率を求めよ。

(3)　n を 5 以上の整数とし，ちょうど n 回目で試行が停止する確率 p_n を求めよ。

(4)　(3) の確率 p_n が最大となる n を求めよ。

5　実数 t に対して複素数 $z = \dfrac{-1}{t+i}$ を考える。ただし，i は虚数単位とする。

（1）z の実部と虚部をそれぞれ t を用いて表せ。

（2）絶対値 $\left| z - \dfrac{i}{2} \right|$ を求めよ。

（3）実数 t が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，点 z はどのような図形を描くか，複素数平面上に図示せよ。

6　正の整数 m，n に対して実数 $A(m,\,n)$ を次の定積分で定める。

$$A(m,\,n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x \, dx$$

（1）次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m,\,n) = A(n,\,m),\ \ A(m+2,\,n) + A(m,\,n+2) = A(m,\,n)$$

（2）$A(m,\,1)$ を求めよ。

（3）次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m,\,n+2) = \frac{n+1}{m+1} A(m+2,\,n)$$

（4）m または n が奇数ならば，$A(m,\,n)$ は有理数であることを示せ。

2020 年度　東北大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$\cos\theta = \dfrac{7}{8}$，$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$

(2)　最小値：$\dfrac{15}{16}$　$\left(s = \dfrac{2}{3}\right)$

2

(1)　$a = 1$

(2)　$a < -3,\ \dfrac{3}{4} < a$

(3)　$a = -8,\ \dfrac{8}{9},\ 1$

3

(1)　証明は省略

(2)　$n = 1,\ 2$

(3)

$$(a,\ b,\ n) = (0,\ 8,\ 1),\ (1,\ 7,\ 1),\ (2,\ 6,\ 1),\ (3,\ 5,\ 1),\ (4,\ 4,\ 1),\ (5,\ 3,\ 1),$$
$$(6,\ 2,\ 1),\ (7,\ 1,\ 1),\ (8,\ 0,\ 1),\ (0,\ 7,\ 2),\ (1,\ 5,\ 2),\ (2,\ 3,\ 2),\ (3,\ 1,\ 2)$$

4

(1)　$\dfrac{3}{40}$

(2)　$\dfrac{9}{40}$

(3)　$p_n = \dfrac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}{3 \cdot 2^{n+3}}$

(4)　$n = 8,\ 9$

5

(1)　$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{-t}{t^2+1}$，$\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{t^2+1}$

(2)　$\dfrac{1}{2}$

(3)　円：$\left| z - \dfrac{i}{2} \right| = \dfrac{1}{2}$ かつ $|\mathrm{Im}(z)| \geqq |\mathrm{Re}(z)|$，$\mathrm{Im}(z) \neq 0$ を満たす範囲，図示は省略

6

(1)　証明は省略

(2)　$\dfrac{1}{m+1}$

(3)　証明は省略

(4)　証明は省略