2020 年度　東京医科歯科大学（前期）

医学部　　試験時間：90 分

全問必答

1　N を自然数として，表と裏が等確率で出るコインを N 回投げる試行を考え，この試行の結果によって関数 $f(x)$ を次のように定義する。

1. $x \leqq 0$ のとき，$f(x)=0$
2. x が N 以下の自然数 n に等しいとき，n 回目に
　表が出れば $f(n)=f(n-1)+1$
　裏が出れば $f(n)=f(n-1)-1$
3. x が $0<x<N$ を満たし，かつ自然数でないとき，$n-1<x<n$ を満たす自然数を n として，
$$f(x)=(x-n+1)f(n)+(n-x)f(n-1)$$
4. $x>N$ のとき，$f(x)=f(N)$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$N=8$ のとき，試行の結果が「表，表，裏，裏，表，裏，裏，裏」の順となったとき，$f(x)$ のグラフを描け。

(2)　自然数 N と 0 以上の整数 k について，$f(x)$ が極値をとる点の個数が k となる確率を $P(k)$ とする。$P(k)$ を N，k を用いて表せ。

(3)　自然数 N と 0 以上の整数 k について，$f(x)$ が極大となる点の個数が k となる確率を $Q(k)$ とする。$Q(k)$ を N，k を用いて表せ。

(4)　(3) の $Q(k)$ について $\sum\limits_{k=0}^{N} kQ(k)$ を N を用いて表せ。

2　a を正の実数，m を実数とし，$k_1=m+\sqrt{m^2+1}$，$k_2=m-\sqrt{m^2+1}$ とする。さらに，C_0，C_1，C_2 を複素数平面上でそれぞれ

$$C_0 : (m+i)z+(m-i)\overline{z}+2a=0$$
$$C_1 : (k_1+i)z+(k_1-i)\overline{z}-2a{k_1}^2=0$$
$$C_2 : (k_2+i)z+(k_2-i)\overline{z}-2a{k_2}^2=0$$

を満たす点 z の集合とする。ここで，i は虚数単位，$\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　C_0，C_1，C_2 がいずれも直線であることを示せ。

(2)　C_0 と C_1 の共有点を P_1 とし，m を変化させたとき P_1 が描く曲線を F_1 とする。F_1 はどのような曲線か。a を用いて答えよ。

(3)　$m>0$ のとき，C_1，C_2 と虚軸で囲まれる領域の面積を T とし，(2) の F_1 と C_1，C_2，虚軸で囲まれる領域の面積を S とする。$\dfrac{T}{S}$ が a によらず一定であることを示し，その極限値 $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{T}{S}$ を求めよ。

3　t を正の実数とし，xyz 空間において，7 つの点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1)，P(t, 1, 0)，Q(0, t, 1)，R(1, 0, t) をとる。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$t = 1$ のとき，四面体 OPQR の体積を求めよ。

(2)　△PQR，△APR，△BQP，△CRQ および xy 平面，yz 平面，zx 平面で囲まれる領域の体積を V_1 とする。V_1 を t を用いて表せ。

(3)　O を中心とし，OP を半径とする球の体積を V_2 とする。t を変化させるとき，$\dfrac{V_1}{V_2}$ が最大となる t の値を求めよ。

2020 年度　東京医科歯科大学（前期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1

（1）　図示は省略

（2）　$P(k)=\begin{cases} \dfrac{(N-1)!}{k!(N-k-1)!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-1} & (0 \leqq k \leqq N-1) \\ 0 & (k \geqq N) \end{cases}$

（3）　$Q(k)=\begin{cases} \dfrac{(N+1)!}{(N-2k)!(2k+1)!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{N} & \left(0 \leqq k \leqq \dfrac{N}{2}\right) \\ 0 & \left(k > \dfrac{N}{2}\right) \end{cases}$

（4）　$\dfrac{N-1}{4}$

2

（1）　証明は省略

（2）　放物線 $y=\dfrac{x^2}{4a}$ の $x>0$ の部分

（3）　証明は省略，3

3

（1）　$\dfrac{1}{3}$　（2）　$V_1=\dfrac{1}{6}(t^3+3t+1)$　（3）　$t=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$