2020 年度　旭川医科大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　n を 0 以上の整数とする。点 $(-n,\ 0)$ から曲線 $C : y = \log x$ に引いた接線の接点の x 座標を a_n とおく。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　a_0 の値を求めよ。

(2)　直線 $x = a_n$，曲線 C および x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

(3)　次の極限を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ であることは用いてよい。

　(i)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n)$

　(ii)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n \log a_n}{n}$

2　a，b，r は正の実数で $0<b<a<r<\sqrt{a^2+b^2}$ とし，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を C とおく。点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点で $p>a$，$q \geqq 0$ を満たす。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　点 P から楕円 C に引いた 2 本の接線の傾きをそれぞれ m_1，m_2（$m_1<m_2$）とするとき，m_1+m_2 と m_1m_2 を p，q，a，b を用いて表せ。

(2)　(1) で引いた傾き m_1，m_2 の接線の接点をそれぞれ Q_1，Q_2 とする。3 点 P，Q_1，Q_2 を頂点とする三角形において，$\angle \mathrm{Q}_1\mathrm{P}\mathrm{Q}_2$ の大きさを θ（$0<\theta<\pi$）とする。

　(i)　$\tan\theta$ を p，q，r，a，b を用いて表し，$\angle \mathrm{Q}_1\mathrm{P}\mathrm{Q}_2$ が鈍角であることを示せ。

　(ii)　r が $\sqrt{a^2+b^2}$ より小さい値をとりながら $\sqrt{a^2+b^2}$ に限りなく近づくとき，点 $\mathrm{P}(r,\ 0)$ における θ の極限値を求めよ。

3　座標平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点 $(x,\ y)$ を格子点（こうしてん）という。n を正の整数として，次の 3 つの不等式を同時に満たす領域を D_n とする。

$$y \geqq x^2,\ \ y \leqq -x^2-2nx+4n^2,\ \ 1 \leqq x \leqq n$$

領域 D_n に含まれる格子点の総数を a_n とするとき，次の各問いに答えよ。

(1)　a_2 を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ のとき，a_n を求めよ。

(3)　$n \geqq 3$ のとき，領域 D_n の境界線上の格子点の総数を b_n とする。

　(i)　領域 D_n の面積 S_n を求めよ。

　(ii)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-\left(a_n-\frac{1}{2}b_n-1\right)}{n}$ を求めよ。

4　p は $2^p = 3$ を満たす実数とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　p は無理数であり，$\dfrac{3}{2} < p < \dfrac{8}{5}$ であることを示せ。

(2)　次の 2 式を満たす x，y を p を用いて表せ。

$$2^{x+y-2} = 9^{y-1},\ 2^{2x-1} = 3^{3x-y+1}$$

(3)　a，b を有理数とする。次の 2 式を満たす有理数 x，y が存在するように a，b を求めよ。

$$2^{x+y-2} = 9^{y-a},\ 2^{2x-b} = 3^{3x-y+1}$$

2020年度　旭川医科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1) e　　(2) $n+1$　　(3) (i) 0　(ii) 1

2

(1) $m_1+m_2=\dfrac{2pq}{p^2-a^2}$，$m_1m_2=\dfrac{q^2-b^2}{p^2-a^2}$

(2) (i) $\tan\theta=\dfrac{2\sqrt{b^2p^2+a^2q^2-a^2b^2}}{r^2-(a^2+b^2)}$，証明は省略　(ii) $\dfrac{\pi}{2}$

3

(1) $a_2=12$　　(2) $a_n=\dfrac{1}{3}n(7n^2-6n+2)\quad(n\geqq 3)$

(3) (i) $S_n=\dfrac{1}{3}(n-1)^2(7n+2)\quad(n\geqq 3)$　(ii) $\dfrac{1}{3}$

4

(1) 証明は省略　　(2) $x=-\dfrac{1}{2(p-1)}$，$y=\dfrac{2p-3}{2(p-1)}$

(3) $a=\dfrac{7}{4}$，$b=\dfrac{1}{2}$