

2020 年度 岡山大学 (前期)

医学部

試験時間 : 120 分

 全問必答

1 x と y をそれぞれ自然数とする。袋 A には白玉 2 個, 赤玉 3 個, 袋 B には白玉 x 個, 赤玉 y 個が入っている。袋 A から 1 個の玉を取り出して袋 B に入れ, よくかき混ぜて袋 B から 1 個の玉を取り出して袋 A に入れる。このとき袋 A の白玉の個数がはじめと変わらない確率を p とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $x = 10, y = 23$ のとき p を求めよ。
- (2) (1) で求めた p を与える x, y の組で $1 \leq x \leq 1000, 1 \leq y \leq 1000$ となるものが何組あるかを求めよ。

2 0 でない複素数 α は $|\alpha - i| = 1$ を満たすとする。また α の偏角 θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。

- (1) $|\alpha|$ を θ を用いて表せ。
- (2) $\beta = -\alpha + 2i$ とおく。 β の偏角 $\arg \beta$ を θ を用いて表せ。ただし $0 \leq \arg \beta < 2\pi$ とする。
- (3) β は (2) で与えられたものとする。複素数平面において実軸上に点 $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ をとる。3 点 $A(\alpha), B(\beta), P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ が一直線上にあるとき θ の値を求めよ。

3 xyz 空間における $O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 1, 0), D(0, 0, 1), E(1, 0, 1), F(1, 1, 1), G(0, 1, 1)$ を頂点とする立方体を考える。点 P は時刻 $t = 0$ に原点 O を出発し毎秒 1 の速さで正方形 OABC の周上を点 O, 点 A, 点 B, 点 C の順に一周する。点 Q は時刻 $t = 0$ に点 D を出発し毎秒 1 の速さで正方形 DEFG の周上を点 D, 点 G, 点 F, 点 E の順に一周する。線分 PQ が通過してできる図形と正方形 OABC, 正方形 DEFG によって囲まれる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

- (1) a は $0 \leq a < \frac{1}{2}$ を満たすとする。平面 $z = a$ によって立体 K を切ったときの切り口の面積を求めよ。
- (2) 立体 K の体積を求めよ。

4 a を正の数とする。 xy 平面において, 点 $A(a, 0)$ をとり, C_1 を双曲線 $x^2 - 4y^2 = -4$ とし, C_2 を双曲線 $x^2 - 4y^2 = 4$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P が C_1 上にあるとする。このとき AP を最小にする点 P とその最小値を求めよ。
- (2) 点 P が C_2 上にあるとする。このとき AP を最小にする点 P とその最小値を求めよ。
- (3) 点 P が C_1 または C_2 上にあるとする。このとき点 $(2, 0)$ が, AP の最小値を与える点 P となるような a の値の範囲を求めよ。

2020 年度 岡山大学 (前期)

医学部

(略解)

☞ 証明, 図示などは省略

1

(1) $p = \frac{47}{85}$

(2) 77 組

2

(1) $|\alpha| = 2 \sin \theta$

(2) $\arg \beta = \theta + \frac{\pi}{2}$

(3) $\frac{\pi}{12}$

3

(1) $1 - 2a \left(0 \leq a < \frac{1}{2}\right)$

(2) $\frac{1}{2}$

4

(1) 最小値: $\sqrt{\frac{a^2}{5} + 1}, P\left(\frac{4}{5}a, \pm\sqrt{\frac{4}{25}a^2 + 1}\right)$

(2) 最小値: $\begin{cases} \sqrt{\frac{a^2}{5} - 1} & P\left(\frac{4}{5}a, \pm\sqrt{\frac{4}{25}a^2 - 1}\right) \\ |a - 2| & P(2, 0) \end{cases}$

(3) $\frac{5 - \sqrt{10}}{2} \leq a \leq \frac{5}{2}$