2020 年度　山形大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　座標平面上の点 P は，原点 $(0,\ 0)$ から出発し，1 枚の硬貨を投げて表が出れば x 軸の正の方向に 1 だけ進み，裏が出れば y 軸の正の方向に 1 だけ進む。このとき，次の問に答えよ。

(1)　硬貨を 3 回投げたとき，点 P が点 $(3,\ 0)$ にある確率を求めよ。

(2)　硬貨を 10 回投げたとき，点 P が点 $(7,\ 3)$ にある確率を求めよ。

(3)　硬貨を 10 回投げたとき，点 P が点 $(3,\ 1)$ を通って，点 $(5,\ 5)$ にある確率を求めよ。

(4)　硬貨を 10 回投げたとき，点 P が点 $(3,\ 3)$ を通らずに，点 $(6,\ 4)$ にある確率を求めよ。

(5)　点 P が $(2,\ 2)$ に到達したら点 P は原点に戻るものとして，次の問に答えよ。

(i)　硬貨を 10 回投げたとき，点 P の x 座標が 6 以上となる確率を求めよ。

(ii)　硬貨を 10 回投げたとき，点 P が点 $(5,\ 5)$ にあったという条件のもとで，点 P が点 $(3,\ 4)$ を通っていた条件付き確率を求めよ。

2　平面上の $\triangle$ABC とその内部の点 P が，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0},\ |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=1$$

を満たすとする。また，$k=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　k^2 を内積 $\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を用いて表せ。

(2)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を k を用いて表せ。

(3)　直線 PA と線分 BC の交点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を用いて表せ。

(4)　線分 AB の垂直二等分線と線分 AC の交点を E とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{PE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を用いて表せ。

(5)　$\triangle$ABC の面積を k を用いて表せ。

3　2 つの関数 $f(x)=\cos^2 x$，$g(x)=1-\sin x$ について，次の問に答えよ。

(1)　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，方程式 $f(x)=g(x)$ を満たす x の値をすべて求めよ。

(2)　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，方程式 $f'(x)=g'(x)$ を満たす x の値をすべて求めよ。

(3)　不定積分 $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$ を求めよ。

(4)　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲において，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた図形を D とする。

　(i)　図形 D の面積を求めよ。

　(ii)　$0<t<\pi$ とする。図形 D の，直線 $x=t$ と直線 $x=t+\pi$ の間にはさまれた部分の面積を $S(t)$ とするとき，関数 $h(t)=S(t)-\dfrac{t}{2}$ の極値をすべて求めよ。また，そのときの t の値を求めよ。

4　原点を O とする座標平面において，楕円 $x^2+4y^2=1$ を C_1 とし，放物線 $x^2=2y$ を C_2 とする。点 $\mathrm{P}\left(s,\ \dfrac{1}{2}s^2\right)$ を放物線 C_2 上を動く点とし，点 P における放物線 C_2 の接線 ℓ_1 は楕円 C_1 と異なる 2 点 A，B で交わるとする。ただし，$s>0$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　s の値の範囲を求めよ。

(2)　線分 AB の中点を D とする。点 D の座標を s を用いて表せ。

(3)　点 P を通り x 軸に垂直な直線を ℓ_2 とし，直線 ℓ_2 と直線 OD の交点を E とする。点 E の座標を s を用いて表せ。

(4)　直線 ℓ_1 と y 軸の交点を F とし，x 軸に関して点 E と対称な点を E′ とする。このとき，直線 FE′ の傾き k の最小値およびそのときの s の値を求めよ。

(5)　点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を G とする。△PFG の面積を S_1 とし，△PDE の面積を S_2 とする。このとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の最大値およびそのときの s の値を求めよ。

2020 年度　山形大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $\dfrac{1}{8}$　(2) $\dfrac{15}{128}$　(3) $\dfrac{15}{256}$　(4) $\dfrac{65}{512}$

(5) (i) $\dfrac{65}{256}$　(ii) $\dfrac{17}{44}$

2

(1) $k^2 = 5 + 4\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \dfrac{k^2-9}{4}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PD}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{PB}} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{PC}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{PE}} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PB}} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PC}}$

(5) $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{(k^2-1)(9-k^2)}$

3

(1) $x = 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ 2\pi$　(2) $x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

(3) $\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$　(C は積分定数)

(4) (i) 4

(ii) 極小値：$2 - \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{5}{12}\pi$　$\left(t = \dfrac{\pi}{6}\right)$　極大値：$2 + \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi}{12}$　$\left(t = \dfrac{5}{6}\pi\right)$

4

(1) $0 < s < \sqrt{2+\sqrt{5}}$　(2) $\mathrm{D}\left(\dfrac{2s^3}{1+4s^2},\ -\dfrac{s^2}{2(1+4s^2)}\right)$

(3) $\mathrm{E}\left(s,\ -\dfrac{1}{4}\right)$　(4) 最小値：$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$\left(s = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(5) 最大値：$\dfrac{9}{4}$　$\left(s = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$