

2020 年度 富山大学（前期）**医学部**

試験時間：120 分

 全問必答

1 座標空間の 2 点 $A(-1, 0, 2)$, $P(0, \sin \theta, \cos \theta)$ を通る直線と xy 平面との交点を $Q(X, Y, 0)$ とおく。 θ が $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲を動くとき、 xy 平面上で点 Q がえがく曲線を C とする。次の問いに答えよ。

- (1) X, Y をそれぞれ θ を用いて表せ。
- (2) Y^2 を X の式で表せ。
- (3) 曲線 C の概形を xy 平面上にかけ。
- (4) xy 平面上で曲線 C と x 軸によって囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

- (1) 不等式

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$$

が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。ただし、 a, b, c は実数とする。

- (2) 不等式

$$\frac{a^5 - a^2}{a^4 + b + c} \geq \frac{a^3 - 1}{a(a + b + c)}$$

が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。ただし、 a, b, c は正の実数とする。

- (3) 不等式

$$\frac{a^5 - a^2}{a^4 + b + c} + \frac{b^5 - b^2}{b^4 + c + a} + \frac{c^5 - c^2}{c^4 + a + b} \geq 0$$

が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。ただし、 a, b, c は $abc \geq 1$ を満たす正の実数とする。

3 関数 $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ を $x>0$ において以下のように定義する。

$$g_1(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{1}{t} \log\left(\frac{x}{t}\right) dt, \quad g_2(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} f(t) dt, \quad g_3(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{1}{t} f\left(\frac{x}{t}\right) dt$$

ただし、 $f(x)$ は連続な関数とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $g'_1(x)$ を求めよ。
- (2) $g'_2(x)$ を $f(x^2)$ と $f\left(\frac{1}{x}\right)$ を用いた式で表せ。
- (3) $g'_3(x)$ を $f(x^2)$ と $f\left(\frac{1}{x}\right)$ を用いた式で表せ。
- (4) $x>1$ において、 $g'_2(x)>0$ かつ $g'_3(x)<0$ が成り立つとする。
 - (ア) $x>1$ において、 $f(x^2)>0$ であることを示せ。
 - (イ) 方程式 $f(x)=0$ の $x>0$ における解を求めよ。

2020 年度 富山大学（前期）**医学部**

（略解）

 証明，図示などは省略**1**

(1) $X = \frac{\cos \theta}{2 - \cos \theta}, Y = \frac{2 \sin \theta}{2 - \cos \theta}$

(2) $Y^2 = -3X^2 + 2X + 1$

(3) 図示は省略

(4) $\frac{32}{27}\pi$

2(1) 証明は省略，等号成立は $a = b = c$ のとき。(2) 証明は省略，等号成立は $a = 1$ のとき。(3) 証明は省略，等号成立は $a = b = c = 1$ のとき。**3**

(1) $g'_1(x) = \frac{3}{x} \log x$

(2) $g'_2(x) = 2xf(x^2) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$

(3) $g'_3(x) = \frac{2}{x}f(x^2) + \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$

(4) (ア) 証明は省略 (イ) $x = 1$