2020 年度　大阪大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　関数

$$f(x)=(x+1)^{\frac{1}{x+1}} \quad (x \geqq 0)$$

について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の最大値を求めよ。

(2)　$f(x)$ とその導関数の極限

$$\lim_{x\to\infty} f(x),\ \lim_{x\to\infty} f'(x)$$

をそれぞれ求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることを用いてもよい。

(3)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし，グラフの凹凸を調べる必要はない。

2　1 個のさいころを n 回投げて，k 回目に出た目が 1 の場合は $X_k=1$，出た目が 2 の場合は $X_k=-1$，その他の目が出た場合は $X_k=0$ とする。

$$Y_k=\cos\left(\frac{\pi}{3}X_k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}X_k\right)$$

とおき，Y_1 から Y_n までの積 $Y_1Y_2Y_3\cdots Y_n$ を Z_n で表す。ただし，i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1)　Z_2 が実数でない確率を求めよ。

(2)　Z_1，Z_2，Z_3，$\cdots$，Z_n がいずれも実数でない確率を求めよ。

(3)　Z_n が実数となる確率を p_n とする。p_n を n を用いて表し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n$ を求めよ。

3　n を 2 以上の自然数とする。三角形 ABC において，辺 AB の長さを c，辺 CA の長さを b で表す。$\angle\mathrm{ACB}=n\angle\mathrm{ABC}$ であるとき，$c<nb$ を示せ。

4　t を正の実数とする。xy 平面において，連立不等式

$$x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ xy\leqq 1,\ x+y\leqq t$$

の表す領域の面積を $S(t)$ とおく。極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}(S(t)-2\log t)$ を求めよ。

5　3 辺の長さの和が 2 である三角形 ABC において，辺 BC の長さを a，辺 CA の長さを b で表す。三角形 ABC を辺 BC を軸として 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を固定して b の値を変化させるとき，V が最大になるのは，三角形 ABC が辺 BC を底辺とする二等辺三角形となるときである。これを示せ。

(2)　a，b の値をともに変化させるとき，V の最大値と，最大値を与える a，b の値をそれぞれ求めよ。

2020 年度　大阪大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $e^{\frac{1}{e}}$

(2) $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$, $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$

(3) 図示は省略

2

(1) $\frac{1}{2}$

(2) $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

(3) $p_n=\frac{1}{3}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$, $\lim_{n\to\infty} p_n=\frac{1}{3}$

3 証明は省略

4 1

5

(1) 証明は省略

(2) 最大値：$\frac{\pi}{12}$　$(a,\ b)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$