2020 年度　千葉大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　袋の中に 1 から 5 までの整数が書かれたカードが 1 枚ずつ入っている。その中から 1 枚取り出して戻すという試行を繰り返す。n 回目に取り出したカードに書かれた整数を a_n とし，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする。n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる確率を p_n とする。

(1)　p_2，p_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n を求めよ。

(3)　$n \geqq 4$ とする。S_1，S_2，S_3 が 3 の倍数でなく $a_3 = 5$ であったとき，n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる条件付き確率 q_n を求めよ。

2　a は 0 でない定数とする。2 つの放物線 $y = x^2$ と $x = \dfrac{1}{2a}y^2 + \dfrac{3a}{4}$ の両方に接する直線がちょうど 3 本となるような a の範囲を求めよ。

3　複素数平面上で複素数 0，$\sqrt{3}$，$\sqrt{3} + i$ を表す点をそれぞれ $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{B_0}$，$\mathrm{B_1}$ とする。正の整数 n に対して，点 A_{n+1} は線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ の中点とし，点 B_{n+1} は直線 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ に関して点 B_{n-1} の反対側にあり，三角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$ が三角形 $\mathrm{A_1B_0B_1}$ と相似になるものとする。点 A_n（$n = 1$，2，3，$\cdots$）が表す複素数を z_n とする。

(1)　複素数 z_3 を求めよ。

(2)　複素数 z_6 を求めよ。

(3)　正の整数 m に対して，複素数 z_{6m} の実部と虚部をそれぞれ求めよ。

4　有理数 a，b に対して，$(a + bi)^2$ の実部と虚部が整数ならば a，b は整数であることを証明せよ。ただし，i は虚数単位である。

5　定義域を $0 \leqq x \leqq 1$ とする関数 $f_n(x)$ と $f(x)$ を以下で定める。

$$f_1(x) = 0,\ f_{n+1}(x) = \int_0^x (f_n(t) - 1)^2\, dt \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

(1)　正の整数 n に対して，不等式

$$0 \leqq f_n(x) \leqq 1 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成り立つことを証明せよ。

(2)　正の整数 n に対して，不等式

$$(-1)^n f_n(x) \geqq (-1)^n f(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成り立つことを証明せよ。

(3)　実数 a（$0 \leqq a \leqq 1$）に対して，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(a)$ を求めよ。

2020 年度　千葉大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）$p_2=\dfrac{8}{25}$，$p_3=\dfrac{24}{125}$　　（2）$p_n=\dfrac{8\cdot 3^{n-2}}{5^n}$

（3）$q_n=\dfrac{2\cdot 3^{n-4}}{5^{n-3}}$

2　$a<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<a$

3

（1）$z_3=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+i$　　（2）$z_6=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}+\dfrac{14}{9}i$

（3）$\mathrm{Re}(z_{6m})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left\{1-3\left(-\dfrac{1}{27}\right)^m\right\}$, $\mathrm{Im}(z_{6m})=\dfrac{3}{2}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{27}\right)^m\right\}$

4　証明は省略

5

（1）証明は省略　　（2）証明は省略　　（3）$\dfrac{a}{a+1}$