2019年度　群馬大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　次の問に答えよ。

(1)　x，y が正の数で，$\log_x y = t$ とするとき，$\log_y \dfrac{x^3}{y^4}$ を t で表せ。

(2)　連立不等式

$$0<x<1,\ 0<y<1,\ (\log_x y)^2 + \log_y \frac{x^3}{y^4} \leqq 0$$

の表す領域を，xy 平面上に図示せよ。

2　i を虚数単位とし，$f(z) = \dfrac{z-1}{z+1+i}$ とする。複素数 z_n（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）は

$$z_1 = i,\ z_{n+1} = f(z_n) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たしているとする。このとき次の問に答えよ。

(1)　虚部が正となる複素数 α で $f(\alpha) = \alpha$ となるものを求めよ。

(2)　n が奇数のとき，z_n は虚部が正である純虚数であることを示せ。

(3)　$|z_n|$ を z_n の絶対値とするとき，数列 $\{|z_n|\}$ の極限を求めよ。

3　関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x=0) \\ \dfrac{\sin x}{e^x - 1} & (x \neq 0) \end{cases}$$

で定義する。次の問に答えよ。

(1)　正の実数 x に対して，x^2，$(e^x-1)^2$，$2(xe^x - e^x + 1)$ の間の大小関係を求めよ。

(2)　$f(x)$ が $x=0$ で微分可能であることを示せ。

(3)　$x=0$ における $f(x)$ の微分係数を求めよ。

4　原点を中心とする半径 2 の円 C_1 と極方程式 $r^2 \cos 2\theta = 1$ $\left(-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ の表す曲線 C_2 について，次の問に答えよ。

(1)　C_2 を直交座標に関する方程式で表せ。

(2)　C_1 と C_2 で囲まれた原点を含まない図形を直線 $y=-x$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

5　座標空間において原点 O，点 A$(1,\ -2,\ 2)$，点 B$(3,\ -4,\ 5)$ をとり，3 点 O，A，B が定める平面を α とする。このとき次の問に答えよ。

(1)　平面 α 上に点 F をとる。F の位置ベクトル $\overrightarrow{f}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と垂直な単位ベクトルであり，$\overrightarrow{f}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 θ は不等式 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たしている。このとき点 F の座標を求めよ。

(2)　点 P$(0,\ 0,\ 2)$ の位置ベクトルを $\overrightarrow{p}$ とおく。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\overrightarrow{e}$ とし，s，t がそれぞれ実数全体を動くとき，$\left|\overrightarrow{p}-(s\overrightarrow{e}+t\overrightarrow{f})\right|$ の最小値を求めよ。

2019 年度　群馬大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$\dfrac{3-4t}{t}$

(2)　図示は省略

2

(1)　$\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}i$

(2)　証明は省略

(3)　$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

3

(1)　$x^2 < 2(xe^x - e^x + 1) < (e^x - 1)^2$

(2)　証明は省略

(3)　$-\dfrac{1}{2}$

4

(1)　$x^2 - y^2 = 1$ $(x > 0)$

(2)　$2\sqrt{3}\pi$

5

(1)　$\mathrm{F}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

(2)　$\dfrac{4}{3}$