

2019年度 神戸大学 (前期)

医学部

試験時間：120 分

 全問必答

1 以下の間に答えよ。

(1) 関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

 の $x > 0$ における最大値とそのときの x の値を求めよ。

 (2) a を $a \neq 1$ をみたす正の実数とする。曲線 $y = e^x$ と曲線 $y = x^a$ ($x > 0$) が共有点 P をもち、さらに点 P において共通の接線をもつとする。点 P の x 座標を t とするとき、 a と t の値を求めよ。

 (3) a と t を (2) で求めた実数とする。 x を $x \neq t$ をみたす正の実数とすると、 e^x と x^a の大小を判定せよ。

2 $|\overrightarrow{AB}| = 2$ をみたす $\triangle PAB$ を考え、辺 AB の中点を M 、 $\triangle PAB$ の重心を G とする。以下の間に答えよ。

 (1) $|\overrightarrow{PM}|^2$ を内積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ を用いて表せ。

 (2) $\angle AGB = \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ の値を求めよ。

 (3) 点 A と点 B を固定し、 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{5}{4}$ をみたすように点 P を動かすとき、 $\angle ABG$ の最大値を求めよ。ただし、 $0 < \angle ABG < \pi$ とする。

3 n を 2 以上の整数とする。2 個のさいころを同時に投げるとき、出た目の数の積を n で割った余りが 1 となる確率を P_n とする。以下の間に答えよ。

 (1) P_2, P_3, P_4 を求めよ。

 (2) $n \geq 36$ のとき、 P_n を求めよ。

 (3) $P_n = \frac{1}{18}$ となる n をすべて求めよ。

4 次のように 1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる数列を $\{a_n\}$ とする。

1, 3, 4, 1, 3, 4, 1, 3, 4, ...

 すなわち、 $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4$ で、4 以上の自然数 n に対し、 $a_n = a_{n-3}$ とする。この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。以下の間に答えよ。

 (1) S_n を求めよ。

 (2) $S_n = 2019$ となる自然数 n は存在しないことを示せ。

 (3) どのような自然数 k に対しても、 $S_n = k^2$ となる自然数 n が存在することを示せ。

5 媒介変数表示

$$x = \sin t, \quad y = (1 + \cos t) \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

で表される曲線を C とする。以下の問に答えよ。

- (1) $\frac{dy}{dx}$ および $\frac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ。
- (2) C の凹凸を調べ、 C の概形を描け。
- (3) C で囲まれる領域の面積 S を求めよ。

2019年度 神戸大学 (前期)

医学部

(略解)

☞ 証明, 図示などは省略

1

- (1) 最大値: e^{-1} , $x = e$ (2) $a = e$, $t = e$ (3) $e^x > x^e$

2

- (1) $|\overrightarrow{PM}|^2 = 1 + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ (2) 8 (3) 最大値: $\frac{\pi}{6}$

3

- (1) $P_2 = \frac{1}{4}$, $P_3 = \frac{2}{9}$, $P_4 = \frac{5}{36}$ (2) $P_n = \frac{1}{36}$
(3) $n = 6, 12, 15, 24, 35$

4

$$(1) S_n = \begin{cases} 8m & (n = 3m) \\ 8m + 1 & (n = 3m + 1) \\ 8m + 4 & (n = 3m + 2) \end{cases} \quad (m \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

- (2) 証明は省略
(3) 証明は省略

5

- (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{(\cos t + 1)(2 \cos t - 1)}{\cos t}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\sin t(2 \cos^2 t + 1)}{\cos^3 t}$
(2) 図示は省略
(3) $S = \frac{2}{3}$