2019 年度　琉球大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　a と b は定数で，$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=e^{ax}\sin(bx)$ と $g(x)=e^{ax}\cos(bx)$ について，$af(x)-bg(x)$ と $bf(x)+ag(x)$ を微分せよ。

(2)　不定積分 $\displaystyle\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$ と $\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$ を求めよ。

(3)　曲線 $y=e^{-x}\sin x$（$0 \leqq x \leqq \pi$）と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

2　関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$（$x>0$）とする。$f(x)$ の最大値を与える x を a とする。次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ の増減を調べることにより，a の値および最大値 $f(a)$ を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線が原点 $(0,\ 0)$ を通るとき，その接線の方程式を求めよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=a$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

3　数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=\sqrt{\frac{a_n}{a_{n+1}}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められるとき，次の問いに答えよ。

(1)　$b_n=\log_2 a_n$ とする。b_{n+2} を b_{n+1}，b_n を用いて表せ。

(2)　(1) で求めた関係式を次のように表すとき，定数 p，q を求めよ。

$$\begin{cases} b_{n+2}-pb_{n+1}=q(b_{n+1}-pb_n) \\ b_{n+2}-qb_{n+1}=p(b_{n+1}-qb_n) \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

ただし，$p \geqq q$ とする。

(3)　(2) で求めた p，q を用いて数列 $\{c_n\}$，$\{d_n\}$ を次のように定める。

$$c_n=b_{n+1}-pb_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$
$$d_n=b_{n+1}-qb_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

一般項 c_n，d_n をそれぞれ求めよ。

(4)　一般項 b_n および極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{2n}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$ を求めよ。

4　箱の中に赤玉 1 個と白玉 2 個が入っている。この箱から玉を 1 個取り出し，玉の色を見た上で箱に戻すという試行を n 回繰り返す。赤玉が連続して m 回以上出た確率を $P(n,\ m)$ とおく。ただし，$n \geqq m \geqq 2$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$P(2,\ 2)$，$P(3,\ 2)$，$P(4,\ 2)$ を求めよ。

(2)　$P(m,\ m)$，$P(m+1,\ m)$，$P(m+2,\ m)$ を求めよ。

(3)　$n=m+1,\ m+2,\ m+3,\ \cdots\cdots,\ 2m$ に対し $P(n,\ m)-P(n-1,\ m)$ を求めよ。

(4)　$P(2m,\ m)$ を求めよ。

2019 年度　琉球大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$\{af(x)-bg(x)\}'=(a^2+b^2)e^{ax}\sin(bx)$，$\{bf(x)+ag(x)\}'=(a^2+b^2)e^{ax}\cos(bx)$

(2)　$\displaystyle\int e^{ax}\sin(bx)\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\sin(bx)-b\cos(bx)\}+C$，
$\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{b\sin(bx)+a\cos(bx)\}+C$　（C は積分定数）

(3)　$\dfrac{1-e^{2\pi}}{8}\pi$

2

(1)　$a=\sqrt{e}$，$f(a)=\dfrac{1}{2e}$　　(2)　$y=\dfrac{1}{3e}x$　　(3)　$1-\dfrac{3}{2\sqrt{e}}$

3

(1)　$b_{n+2}=-\dfrac{1}{2}b_{n+1}+\dfrac{1}{2}b_n$　　(2)　$p=\dfrac{1}{2}$，$q=-1$

(3)　$c_n=(-1)^{n-1}$，$d_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(4)　$b_n=\dfrac{2}{3}\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-(-1)^{n-1}\right\}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\sqrt[3]{4}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

4

(1)　$P(2,\ 2)=\dfrac{1}{9}$，$P(3,\ 2)=\dfrac{5}{27}$，$P(4,\ 2)=\dfrac{7}{27}$

(2)　$P(m,\ m)=\dfrac{1}{3^m}$，$P(m+1,\ m)=\dfrac{5}{3^{m+1}}$，$P(m+2,\ m)=\dfrac{7}{3^{m+1}}$

(3)　$P(n,\ m)-P(n-1,\ m)=\dfrac{2}{3^{m+1}}$　　(4)　$P(2m,\ m)=\dfrac{2m+3}{3^{m+1}}$