2019年度　熊本大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　座標平面上の曲線 $C_1 : y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ および $C_2 : y = x^3 + 1$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点がちょうど 2 個になるような実数 a の値を求めよ。ただし，$a \fallingdotseq 0$ とする。

(2)　(1) で求めた a に対し，曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ。

2　座標平面上の直線 ℓ を $y = ax - a - 2$，直線 m を $y = bx + 3b$ とおく。直線 ℓ と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし，a ，b は ℓ と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 ℓ と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2)　点 A$(1,\ -2)$，点 B$(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3)　△APB の面積が最大となるときの a の値を求めよ。

3　座標平面上の曲線 $y = x\sin 3x + 3x^2 \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を C とする。曲線 C の接線で原点を通るものを ℓ とし，その接点の x 座標を a とする。ただし，$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　曲線 C と直線 ℓ の共有点の座標をすべて求めよ。

(3)　曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ。

4　赤球と白球の 2 色の球を用いて行うゲームがあり，手元にある球全体に対する赤球の比率が p であるとき，確率 p^2 でゲームに勝つものとする。n を 2 以上の整数とし，赤球，白球ともに n 個入っている箱から n 個の球を取り出してゲームを行った。以下の問いに答えよ。

(1)　k を 0 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となる確率は $\dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ となることを示せ。

(2)　k を 1 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となり，さらにゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)} \cdot \dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$ であることを示せ。

(3)　ゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}$ であることを示せ。

2019年度　熊本大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）　$a=\frac{1}{2}$　　（2）　$\frac{263}{210}\pi$

2

（1）　円 $(x+1)^2+(y+1)^2=5$。ただし，点 $(1,\ 0)$，$(-3,\ -2)$ を除く。

（2）　$\mathrm{AP}=\frac{2|a-2|}{\sqrt{a^2+1}}$，$\mathrm{BP}=\frac{2|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}}$

（3）　$a=\frac{1}{3},\ -3$

3

（1）　$a=\frac{\pi}{3}$　　（2）　$(0,\ 0)$，$\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi^2}{3}\right)$　　（3）　$\frac{\pi^3}{54}-\frac{\pi}{9}$

4

（1）　証明略　　（2）　証明略　　（3）　証明略