

2019年度 東京大学（前期）**医学部**

試験時間：150 分

 全問必答**1** 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) dx$$

2 一辺の長さが1の正方形 ABCD を考える。3点 P, Q, R はそれぞれ辺 AB, AD, CD 上にあり、3点 A, P, Q および3点 P, Q, R はどちらも面積が $\frac{1}{3}$ の三角形の3頂点であるとする。 $\frac{DR}{AQ}$ の最大値, 最小値を求めよ。**3** 座標空間内に5点 A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(-2, 0, 0), D(0, -2, 0), E(0, 0, -2) を考える。線分 AB の中点 M と線分 AD の中点 N を通り、直線 AE に平行な平面を α とする。さらに、 p は $2 < p < 4$ をみたす実数とし、点 P(p , 0, 2) を考える。

- (1) 八面体 PABCDE の平面 $y = 0$ による切り口および、平面 α の平面 $y = 0$ による切り口を同一平面上に図示せよ。
- (2) 八面体 PABCDE の平面 α による切り口が八角形となる p の範囲を求めよ。
- (3) 実数 p が (2) で定まる範囲にあるとする。八面体 PABCDE の平面 α による切り口のうち $y \geq 0$, $z \geq 0$ の部分を点 (x, y, z) が動くとき、座標平面上で点 (y, z) が動く範囲の面積を求めよ。

4 n を1以上の整数とする。

- (1) $n^2 + 1$ と $5n^2 + 9$ の最大公約数 d_n を求めよ。
- (2) $(n^2 + 1)(5n^2 + 9)$ は整数の2乗にならないことを示せ。

5 以下の問いに答えよ。

- (1) n を1以上の整数とする。 x についての方程式

$$x^{2n-1} = \cos x$$

は、ただ一つの実数解 a_n をもつことを示せ。

- (2) (1) で定まる a_n に対し、 $\cos a_n > \cos 1$ を示せ。
- (3) (1) で定まる数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ に対し、

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n, \quad c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^n - b}{a_n - a}$$

を求めよ。

6 複素数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ および実数 a, b が、次の 3 条件をみたしながら動く。

条件 1: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は相異なる。

条件 2: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は 4 次方程式 $z^4 - 2z^3 - 2az + b = 0$ の解である。

条件 3: 複素数 $\alpha\beta + \gamma\delta$ の実部は 0 であり、虚部は 0 でない。

(1) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ のうち、ちょうど 2 つが実数であり、残りの 2 つは互いに共役な複素数であることを示せ。

(2) b を a で表せ。

(3) 複素数 $\alpha + \beta$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

2019年度 東京大学（前期）**医学部**

（略解）

 証明，図示などは省略

1
$$\frac{60\sqrt{2} + 3\pi - 70}{24}$$

2 最大値： $\frac{64}{81}$ ，最小値： $\frac{2}{3}$

3

(1) 図示は省略

(2) $3 < p < 4$

(3) $\frac{7p-18}{p(p-2)}$

4

(1)
$$d_n = \begin{cases} 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 2 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

(2) 証明は省略

5

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) $a = 1, b = \sqrt{\cos 1}, c = \frac{\cos 1 - \sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}$

6

(1) 証明は省略

(2) $b = -a^2$

(3) 図示は省略