2019年度　東京医科歯科大学（前期）

医学部　試験時間：90 分

全問必答

1　n を 2 以上の自然数とし，ひとつのサイコロを n 回くり返し投げるとする。n 以下の自然数 k について，k 回目に 1 から 4 の目が出たら $a_k=1$，5 または 6 の目が出たら $a_k=0$ として，数列 $\{a_k\}$ を定義する。さらに数列 $\{b_k\}$ を，$b_1=0$，2 以上 n 以下の自然数 k について $b_k=(a_k+a_{k-1})(2-a_k-a_{k-1})$ と定義する。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　k を 2 以上 n 以下の自然数とする。$b_k=0$ となる確率を求めよ。

(2)　$b_2=b_3=\cdots=b_n=1$ となる確率を n を用いて表せ。

(3)　n が 5 以上のとき，$S_n=\dfrac{b_2}{2}+\dfrac{b_3}{2^2}+\cdots+\dfrac{b_n}{2^{n-1}}$ とおく。このとき $\dfrac{5}{8}\leqq S_n<\dfrac{15}{16}$ となる確率を求めよ。

2　三角形 ABC において，頂点 A，B，C の角の大きさをそれぞれ A，B，C，対辺の長さをそれぞれ a，b，c で表す。また a，b，c は，この順で正または 0 の公差をもつ等差数列をなすとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$C=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

(2)　$C=2A$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

(3)　$C=A+\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

3　a と b を実数として，xy 平面において，2 つの曲線

$$C_1 : y=x^4-x^2$$
$$C_2 : y=a(x^2-1)$$

および直線

$$\ell : y=b$$

を考える。ただし，C_1 と ℓ は相異なる 4 点で交わるとする。また，C_1 と C_2 は $0<x_0<1$ となる交点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ をひとつもつとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ。また x_0，y_0 を a を用いて表せ。

(2)　b のとりうる値の範囲を求めよ。また C_1 と ℓ の交点の x 座標を b を用いて表せ。

(3)　C_1 と ℓ で囲まれる領域のうち，$y\leqq b$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とする。V_1 を b を用いて表せ。

(4)　$b=y_0$ として，C_2 と ℓ で囲まれる領域のうち，$y\leqq y_0$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする。$3V_1=V_2$ のとき，a の値を求めよ。

2019年度　東京医科歯科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $\dfrac{5}{9}$

(2) $\begin{cases} 2\left(\dfrac{2}{9}\right)^{\frac{n}{2}} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \left(\dfrac{2}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$

(3) $\dfrac{22}{81}$

2

(1) $\dfrac{13}{14}$

(2) $\dfrac{3}{4}$

(3) $\dfrac{3+\sqrt{13}}{8}$

3

(1) $0<a<1$，$x_0=\sqrt{a}$，$y_0=a^2-a$

(2) $-\dfrac{1}{4}<b<0$，$\pm\sqrt{\dfrac{1\pm\sqrt{1+4b}}{2}}$（複号任意）

(3) $V_1=\dfrac{\pi}{6}(1+4b)^{\frac{3}{2}}$

(4) $a=\dfrac{1}{3}$