2019 年度　旭川医科大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　a は定数で $a>1$ とし，点 $(a,\ 0)$ を通る傾き m の直線と円 $x^2+y^2=1$ とが異なる 2 点 A，B で交わる。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　m の値の範囲を求めよ。

(2)　(1) で求めた範囲を m が動くとき，線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

2　n を正の整数とし，$f_n(x)=e^{-x}\left(1+\dfrac{x}{1}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)$ とおく。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　第 2 次までの導関数 $f_n'(x)$ と $f_n''(x)$ を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，$\displaystyle\int_1^n \log x\,dx<\log 2+\log 3+\cdots\cdots+\log n$ が成り立つことを示せ。

(3)　$n \geqq 1$ のとき，すべての正の実数 x に対し，$-\dfrac{1}{e} \leqq f_n'(x)<0$ が成り立つことを示せ。

3　α を，虚部が 0 でない複素数とする。複素数平面上で 3 点 0，α，α^2 を通る円を C とし，C の中心の複素数を β とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　β を α，$\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

(2)　点 α^3 は C 上にないことを示せ。

(3)　$\dfrac{\alpha^3}{\beta}$ の実部が正となるとき，α の満たす条件を求めよ。

(4)　0 でないどんな実数 t に対しても点 $t\alpha^3$ が C 上にないとき，点 α 全体の集合を複素数平面上に図示せよ。

4　2 つの数列 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$ は次の漸化式を満たしている。

$$\begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{1}{4}q_n - \dfrac{1}{4} \\ q_{n+1} = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{3}{4}q_n + \dfrac{1}{4} \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　$p_n + q_n = p_1 + q_1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを示せ。

(2)　一般項 p_n を p_1，q_1 を用いて表せ。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ が収束し，和が 1 となるように，p_1 と q_1 の値を定めよ。

(4)　(2)，(3) で求めた数列 $\{p_n\}$ について，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} np_n$ の和を求めよ。ただし，$|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ であることは，証明なしに用いてよい。

2019年度　旭川医科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $-\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}<m<\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$

(2) 円：$\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}\quad\left(x<\dfrac{1}{a}\right)$

2

(1) $f'(x)=-\dfrac{x^ne^{-x}}{n!}$，$f''(x)=\dfrac{x^{n-1}e^{-x}(x-n)}{n!}$

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

3

(1) $\beta=\dfrac{\alpha^2(1-\overline{\alpha})}{\alpha-\overline{\alpha}}$

(2) 証明は省略

(3) $\alpha+\overline{\alpha}>1$，$\alpha\neq\overline{\alpha}$

(4) 図示は省略

4

(1) 証明は省略

(2) $p_n=\dfrac{p_1+q_1-1}{3}+\dfrac{2p_1-q_1+1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

(3) $p_1=\dfrac{3}{4}$，$q_1=\dfrac{1}{4}$

(4) $\dfrac{4}{3}$

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto