

2019年度 新潟大学（前期）

医学部

試験時間：90 分

 全問必答

1 多項式 $P(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$ について、次の問いに答えよ。ただし、 n は 2 以上の整数とする。

- (1) $Q(t) = P(t+1)$ とおく。多項式 $Q(t)$ の定数項、 t の係数および t^2 の係数は 0 であることを示せ。
- (2) $P(x)$ は $(x-1)^3$ で割り切れるが、 $(x-1)^4$ では割り切れないことを示せ。
- (3) 方程式 $P(x) = 0$ の整数解は 1 および -1 のみであることを示せ。

2 平行四辺形 ABCD において、辺 AB の長さを p 、辺 BC の長さを q とし、 $\theta = \angle BAD$ とおく。ただし $p > q$ とする。平行四辺形 ABCD の内部の点 P と 4 本の直線 AB, BC, CD, DA との距離のうちで最小のものを r とする。点 P が平行四辺形 ABCD の内部を動くときの r の最大値を R とし、最大値 R を与える点 P の軌跡を L とする。次の問いに答えよ。

- (1) 平行四辺形 ABCD 内に L を図示せよ。
- (2) 半径 R の円の中心が L 上を動くとき、円およびその内部が通過する領域の面積を S とする。 S を p, q および θ で表せ。
- (3) 平行四辺形 ABCD の面積を T とする。(2) で求めた S に対して $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S}{T}$ を求めよ。

3 半径がそれぞれ a, b の円を C_a, C_b とする。 C_a 上に点 A, C_b 上に点 B をとる。はじめに 2 点 A, B を一致させ、 C_b を C_a に外接させながら滑らないように回転させる。ここで、点 B が再び C_a 上に来るときを C_b の回転の 1 周期とする。次の問いに答えよ。ただし、必要があれば、自然数 m, n の最大公約数を $\gcd(m, n)$ で表せ。

- (1) a, b を自然数とする。 C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき、 C_b は何周期回転しているか、 a, b を用いて表せ。
- (2) a, b を正の有理数とし、 $a = \frac{p}{q}, b = \frac{s}{t}$ とおく。ここで p, q は互いに素な自然数とし、 s, t も互いに素な自然数とする。 C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき、 C_b は何周期回転しているか、 p, q, s, t を用いて表せ。
- (3) a, b は互いに素な自然数とする。 $k = 1, 2, \dots, a$ に対して、 C_b が k 周期回転したとき、点 B が一致する C_a 上の点を A_k とする。このとき $\{A_1, A_2, \dots, A_a\}$ は C_a をちょうど a 等分することを示せ。

4 a は $-2 < a < 2$ をみたす定数とし、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + a \sin x \cos x}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) $t = \sin x + \cos x$ において、 $f(x)$ を t と a を用いて表せ。また、 t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $f(x)$ の最大値、最小値を求めよ。

(3) $a = -1$ と $a = 1$ の場合に、 $u = \sin x - \cos x$ において、置換積分法により定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ を求めよ。

2019年度 新潟大学（前期）

医学部

（略解）

 証明，図示などは省略**1**

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

2

(1) 図示は省略

(2) $S = q \left(\frac{\pi}{4} q \sin \theta + p - q \right) \sin \theta$

(3) $\frac{p-q}{p}$

3

(1) $\frac{a}{\gcd(a, b)}$

(2) $\frac{pt}{\gcd(pt, qs)}$

(3) 証明は省略

4

(1) $f(x) = \frac{2t}{2 + a(t^2 - 1)}, -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

(2) 最大値: $\begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{a+2} & (-2 < a \leq \frac{2}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{a(2-a)}} & (\frac{2}{3} < a < 2) \end{cases}$, 最小値: $\begin{cases} -\frac{2\sqrt{2}}{a+2} & (-2 < a \leq \frac{2}{3}) \\ -\frac{1}{\sqrt{a(2-a)}} & (\frac{2}{3} < a < 2) \end{cases}$

(3) $a = -1 \cdots \pi, a = 1 \cdots \frac{2}{\sqrt{3}} \{2 \log(\sqrt{3} + 1) - \log 2\},$