2019年度　山形大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　3 個のさいころ A，B，C を同時に投げる。それぞれのさいころの出る目を a，b，c で表す。このとき，次の問に答えよ。

(1)　3 個のさいころの出る目すべてが奇数になる確率を求めよ。

(2)　出る目の積 abc が偶数または 3 の倍数になる確率を求めよ。

(3)　出る目の積 abc が偶数であったとき，出る目の和 $a+b+c$ が奇数になる条件付き確率を求めよ。

(4)　座標空間上の 4 点 $(0,\ 0,\ 0)$，$(a,\ 0,\ 0)$，$(0,\ b,\ 0)$，$(0,\ 0,\ c)$ を頂点とする三角錐の体積を V とする。

　(i)　V が自然数になる確率を求めよ。

　(ii)　V が自然数かつ $V>12$ になる確率を求めよ。

2　座標空間において，原点を O とし，3 点 A，B，C を

$$\mathrm{A}\left(4,\ \frac{16}{3},\ 0\right),\ \mathrm{B}(-4,\ 3,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$$

とする。ただし，$c>0$ とする。△OAB において，辺 OA，辺 AB，辺 BO を $1:2$ に内分する点を，それぞれ D，E，F とする。線分 AF と線分 DE との交点を P とし，線分 OE と線分 DF との交点を Q とする。また，線分 CQ の中点を R とし，線分 CP を $1:3$ に内分する点を S とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ。

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が垂直であるとき，c の値を求めよ。

3　e は自然対数の底とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　a を実数とする。定積分 $\displaystyle\int_1^e t^{a-1}\,dt$ を求めよ。

(2)　関数 $f(x)=\displaystyle\int_1^e t^{x-1}\,dt$ について，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ を求めよ。ただし，$e^x>x$ を用いてもよい。

(3)　関数 $g(x)=(x-1)e^x+1-\dfrac{x^2}{2}$ について，$g'(x)>0$ となる x の範囲をすべて求めよ。また，$g(x)>0$ となる x の範囲をすべて求めよ。

(4)　曲線 $y=g(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=-1$，$x=1$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(5)　関数 $f(x)-\dfrac{x}{2}$ が極値をもつかを調べ，極値をもたない場合は，その理由を述べよ。極値をもつ場合は，その極値をすべて求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

4　a と b を互いに異なる正の定数とする。双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と x 軸との交点を $\mathrm{A}(a,\,0)$, $\mathrm{B}(-a,\,0)$ とする。x_1 を $|x_1|>a$ を満たす実数とし，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と直線 $x=x_1$ との交点を $\mathrm{P}(x_1,\,y_1)$, $\mathrm{Q}(x_1,\,-y_1)$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　実数 x_1，y_1 を用いて，直線 AP と直線 BQ の交点 R の座標を表せ。

(2)　(1) で求めた交点 $\mathrm{R}(x,\,y)$ の軌跡を求めよ。

(3)　原点 O を極とし，x 軸の正の部分を始線とする極座標を $(r,\,\phi)$ とする。(2) で求めた軌跡を極座標 $(r,\,\phi)$ を用いて表せ。

(4)　(2) で求めた軌跡が表す図形を L とする。図形 L を，原点を中心にして反時計回りに角度 θ だけ回転させた図形を $L(\theta)$ とする。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。図形 L と図形 $L(\theta)$ の交点の個数を n とするとき，これら n 個の交点の極座標を，定数 a，b および角度 θ を用いて表せ。

(5)　(4) で求めた図形 L と図形 $L(\theta)$ の n 個の交点を V_1，…，V_n とし，それらの極座標を $\mathrm{V}_1(r_1,\,\phi_1)$，…，$\mathrm{V}_n(r_n,\,\phi_n)$ とする。ただし，r_1，…，r_n は正の数とし，$0\leqq\phi_1<\cdots<\phi_n<2\pi$ とする。角度 θ を $0<\theta<\pi$ の範囲で動かしたとき，n 角形 $\mathrm{V}_1\cdots\mathrm{V}_n$ の面積の最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

2019 年度　山形大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $\dfrac{1}{8}$　(2) $\dfrac{26}{27}$　(3) $\dfrac{3}{7}$

(4) (i) $\dfrac{133}{216}$　(ii) $\dfrac{7}{54}$

2

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\dfrac{20}{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=5$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{4}{15}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{4}{15}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{15}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{2}{15}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{15}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{3}{20}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{15}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

(4) $c=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

3

(1) $\begin{cases} 1 & (a=0) \\ \dfrac{e^a-1}{a} & (a\neq 0) \end{cases}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

(3) $g'(x)>0 \to x\neq 0$，$g(x)>0 \to x>0$

(4) $4-e-\dfrac{3}{e}$

(5) 極小値：1　$(x=0)$

4

(1) $\mathrm{R}\left(\dfrac{a^2}{x_1},\ -\dfrac{ay_1}{x_1}\right)$

(2) 楕円：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　ただし，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(-a,\ 0)$ を除く。

(3) $r=\dfrac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\phi+a^2\sin^2\phi}}$　$(0<\phi<\pi,\ \pi<\phi<2\pi)$

(4) $\left(\dfrac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\dfrac{\theta}{2}+a^2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}},\ \dfrac{\theta}{2}\right)$，$\left(\dfrac{ab}{\sqrt{b^2\sin^2\dfrac{\theta}{2}+a^2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}},\ \dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$\left(\dfrac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\dfrac{\theta}{2}+a^2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}},\ \dfrac{\theta}{2}+\pi\right)$，$\left(\dfrac{ab}{\sqrt{b^2\sin^2\dfrac{\theta}{2}+a^2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}},\ \dfrac{\theta}{2}+\dfrac{3}{2}\pi\right)$

(5) 最小値：$\dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$　$\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right)$