

2019年度 名古屋大学（前期）**医学部**

試験時間：150 分

 全問必答**1** 正の整数 n に対し

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$$

とする。

- (1) I_1 を求めよ。必要ならば $\frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \right)$ を使ってよい。
- (2) $n \geq 3$ のとき、 I_n を I_{n-2} と n で表せ。
- (3) xyz 空間において xy 平面内の原点を中心とする半径 1 の円板を D とする。 D を底面とし、点 $(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を C とする。 C を平面 $x = \frac{1}{2}$ で 2 つの部分に切断したとき、小さい方を S とする。 z 軸に垂直な平面による切り口を考えて S の体積を求めよ。

2 空間内に $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形 ABC と平面 P がある。点 A は P 上にあり、点 B と点 C は P 上ではなく、 P に関して同じ側に位置している。点 B, C から P に下ろした垂線と P との交点をそれぞれ B', C' とする。

- (1) $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{B'B} \cdot \overrightarrow{C'C} = 0$ を示せ。
- (2) $\angle B'AC' > \frac{\pi}{2}$ を示せ。
- (3) P 上の三角形 $AB'C'$ の辺の長さは短いものから 4, $\sqrt{21}$, 7 であった。このとき、辺 AB の長さを求めよ。

3 正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数ではなく、それを 10 進法で表すと、小数第 1 位は 0 であり、第 2 位は 0 以外の数であるとする。

- (1) このような n の中で最小のものを求めよ。
- (2) このような n を小さいものから順に並べたときに 10 番目にくるものを求めよ。

4 正の整数 n に対して $1, 2, \dots, n$ を一列に並べた順列を考える。そのような順列は $n!$ 個ある。このうち 1 つを等確率で選んだものを $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ とする。この $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ に対し、各添字 $i = 1, 2, \dots, n$ について、 a_i の値が j であるとき、その j を添字にもつ a_j の値が k であることを $a_i = j \rightarrow a_j = k$ と書くことにする。ここで $a_i = j \rightarrow a_j = k \rightarrow a_k = l \rightarrow \dots$ のようにたどり、それを続けていく。例えば $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (2, 5, 6, 1, 4, 3, 7)$ のとき、

(i) $a_1 = 2 \rightarrow a_2 = 5 \rightarrow a_5 = 4 \rightarrow a_4 = 1 \rightarrow a_1 = 2$

(ii) $a_3 = 6 \rightarrow a_6 = 3 \rightarrow a_3 = 6$

(iii) $a_7 = 7 \rightarrow a_7 = 7$

となり、どの i から始めても列は必ず一巡する。この一巡するそれぞれの列をサイクル、列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ。上の (i), (ii), (iii) は長さがそれぞれ 4, 2, 1 のサイクルになっている。

(1) $n = 3$ とする。選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ。

(2) $n = 4$ とする。長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ。

(3) n 以下の正の整数 k に対して

$$\sum_{j=k}^n \frac{1}{j} > \log(n+1) - \log k$$

を示せ。

(4) n を奇数とする。選んだ順列が長さ $\frac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は $p > \log 2$ をみたすことを示せ。

2019年度 名古屋大学 (前期)**医学部**

(略解)

 証明, 図示などは省略**1**

(1) $I_1 = \log(2 + \sqrt{3})$

(2) $I_n = \frac{\sqrt{3} \cdot 2^{n-2}}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$

(3) $\frac{\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{24} \log(2 + \sqrt{3})$

2

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 5

3

(1) 26

(2) 145

4(1) $\frac{2}{3}$ (2) (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (3, 4, 2, 1),
(3, 1, 4, 2), (4, 3, 1, 2), (4, 1, 2, 3)

(3) 証明は省略

(4) 証明は省略