

2019年度 北海道大学（前期）**医学部**

試験時間：120 分

 全問必答

1 p を負の実数とする。座標空間に原点 O と 3 点 $A(-1, 2, 0)$, $B(2, -2, 1)$, $P(p, -1, 2)$ があり、3 点 O , A , B が定める平面を α とする。また、点 P から平面 α に垂線を下ろし、 α との交点を Q とする。

- (1) 点 Q の座標を p を用いて表せ。
- (2) 点 Q が $\triangle OAB$ の周または内部にあるような p の範囲を求めよ。

2 n を自然数とし、 $a_n = n(n+1)$ とする。さらに、 a_n と a_{n+3} の最大公約数を d_n とする。

- (1) d_n は偶数であることを示せ。
- (2) d_n は 8 で割り切れないことを示せ。
- (3) p を 5 以上の素数とすると、 d_n は p で割り切れないことを示せ。
- (4) $d_n \leq 12$ を示せ。また、 $d_n = 12$ となるような n を 1 つ求めよ。

3 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。 $0, \frac{1}{t}$ 以外のすべての実数 x で定義された関数

$$f(x) = \frac{x+t}{x(1-tx)}$$

を考える。

- (1) $f(x)$ は極大値と極小値を 1 つずつもつことを示せ。
- (2) $f(x)$ の極大値を与える x の値を α , 極小値を与える x の値を β とし、座標平面上に 2 点 $P(\alpha, f(\alpha))$, $Q(\beta, f(\beta))$ をとる。 t が $0 < t < 1$ を満たしながら変化するとき、線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ。

4 n を 3 以上の自然数とする。2 つの箱 X と Y があり、どちらの箱にも 1 から n までの n 枚の番号札が入っている。

A と B の 2 人のうち、A は箱 X から札を 1 枚取り出し、取り出した札の番号を得点とする。B は箱 Y から札を 1 枚取り出し、もし取り出した札の番号が 3 から n までのいずれかであればその番号を得点とし、もし取り出した札の番号が 1 または 2 のいずれかであれば、その札を箱 Y に戻し、再び箱 Y から札を 1 枚取り出し、取り出した札の番号を B の得点とする。

- (1) m を n 以下の自然数とする。B の得点が m になる確率を求めよ。
- (2) A の得点より B の得点が大きくなる確率 p_n を求めよ。

5 $f(x)$ を区間 $[0, \pi]$ で連続な関数とする。関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\dots$ を関係式

$$f_1(x) = f(x),$$

$$f_{n+1}(x) = 2 \cos x + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin(x-t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。さらに、自然数 n に対して

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin t dt, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \cos t dt$$

とおく。

- (1) a_{n+1} , b_{n+1} を a_n , b_n を用いて表せ。
- (2) $c_n = a_n - 1$ とおく。このとき、 $c_{n+2} = -c_n$ が成立することを示し、一般項 c_n を a_1 と b_1 を用いて表せ。
- (3) a_n , b_n が n によらない定数となるような $f(x)$ を 1 つ求めよ。

2019年度 北海道大学（前期）

医学部

（略解）

 証明，図示などは省略**1**

$$(1) \quad \mathbb{Q}\left(\frac{5}{9}(p+2), -\frac{2}{9}(p+2), \frac{4}{9}(p+2)\right) \quad (2) \quad -2 \leq p \leq -\frac{5}{7}$$

2

- (1) 証明は省略
(2) 証明は省略
(3) 証明は省略
(4) 証明は省略, $n = 8$

3

- (1) 証明は省略
(2) 放物線 $y = 2x^2 + 1$ の $-1 < x < 0$ の部分

4

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{2}{n^2} & (m = 1, 2 \text{ のとき}) \\ \frac{n+2}{n^2} & (m = 3, 4, \dots, n \text{ のとき}) \end{cases} \quad (2) \quad p_n = \frac{n^2 + n - 4}{2n^2}$$

5

- (1)
$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = 2 - a_n \end{cases}$$
- (2) 証明は省略,
$$c_n = \begin{cases} (a_1 - 1)(-1)^{\frac{n-1}{2}} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ (b_1 - 1)(-1)^{\frac{n-2}{2}} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$
- (3) $f(x) = \cos x + \sin x$