2018年度　長崎大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$$S_n = 6n - 2a_n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

が成り立つとき，初項 a_1 および一般項 a_n を求めよ。

(2)　$\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} = A$ とするとき，

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$

の値を A を用いて表せ。

(3)　方程式

$$\log_2 x^2 = 2 + \log_2 |x-2|$$

を解け。

(4)　関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & (x < 0) \\ x & (x \geqq 0) \end{cases}$$

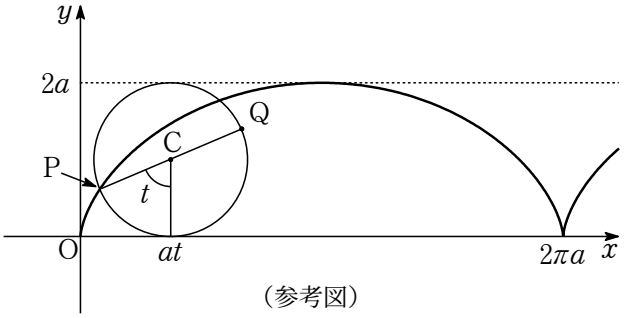
と定義する。「微分係数の定義」にしたがって，$f(x)$ の $x = 0$ における微分係数を求めよ。

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

2　半径 a の円が x 軸上を滑ることなく正の方向に回転していくとき，円周上の 2 つの定点 P と Q の運動について考える。時刻 $t=0$ のとき P は原点 O にあり，Q は点 $(0,\ 2a)$ にある。円は毎秒 1 ラジアンの速さで回転する。このとき，点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ は

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$$

で表される。以下の問いに答えよ。



（参考図）

(1)　時刻 t における円の中心 C と点 Q の座標を，それぞれ求めよ。

(2)　時刻 t における点 P の速度ベクトル $\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ を求めよ。また，時刻 t が $0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲において，速さ $|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}|$ の最大値と最小値，およびその時の P の座標を求めよ。

(3)　時刻 t における点 Q の速度ベクトル $\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}$ を求めよ。さらに，内積 $\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\cdot\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}$ を求めよ。

(4)　時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ から $t=\dfrac{3\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のり L_{P} と，点 Q が動く道のり L_{Q} を，それぞれ求めよ。

3　t を正の実数とし，複素数平面上に 2 点 $\mathrm{A}(t)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{t}\right)$ がある。等式

$$t\left|z+\frac{1}{t}\right|=\frac{1}{t}|z-t| \qquad \text{(a)}$$

を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ の全体が表す図形を F とする。下の小問 (1) から (4) を通して F がどのような図形を表すか調べたい。以下の問いに答えよ。

(1)　A と B はどちらも図形 F の点ではないことを示せ。

(2)　$t=1$ ならば，F はどのような図形を表すか。

(3)　$t\neq 1$ とする。図形 F の点 $\mathrm{P}(z)$ が直線 AB 上に位置するような z の値は 2 つある。その値 z_1 と z_2 を求めよ。ただし，$|z_1|<|z_2|$ とする。

(4)　$t\neq 1$ とする。2 点 $\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$ を結ぶ線分の中点を $\mathrm{M}(m)$ として，m の値を求めよ。また，$\mathrm{P}(z)$ が図形 F の点であるとき，$|z-m|$ の値を求めよ。さらに，F はどのような図形を表すか。

4　積分を用いて表される次の関数

$$F_n(x)=\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

について，以下の問いに答えよ。ただし，$0!=1$ と定める。また，関数 $y=t^0$ は，関数 $y=1$ を意味する。

(1)　部分積分を利用して，$F_2(x)$ を $F_1(x)$ を用いて表せ。同様に，$F_1(x)$ を $F_0(x)$ を用いて表せ。

(2)　$F_0(x)$ を計算し，積分を含まない式として表せ。その結果を利用して，$F_1(x)$ を積分を含まない式として表せ。さらに，$F_2(x)$ を積分を含まない式として表せ。

(3)　$n\geqq 1$ のとき，$F_n(x)$ を $F_{n-1}(x)$ を用いて表せ。さらに，$n\geqq 0$ のとき，$F_n(x)$ を積分を含まない式として表せ。

(4)　$p(x)=x^n$ とおくとき，k 次導関数

$$p^{(k)}(x)\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

を求めよ。そして，

$$\int_0^x t^n e^{-t}\,dt=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)$$

が成り立つことを示せ。ただし，$p^{(0)}(x)=p(x)$ と定める。

2018年度　長崎大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$a_1=2,\ a_n=6-4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(2)　$4A^2$

(3)　$x=-2\pm 2\sqrt{3}$

(4)　1

2

(1)　$\mathrm{C}(at,\ a),\ \mathrm{Q}(a(t+\sin t),\ a(1+\cos t))$

(2)　$\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}=(a(1-\cos t),\ a\sin t)$
最大値：$2a$ $\mathrm{P}(\pi a,\ 2a)$，最小値：0 $\mathrm{P}(0,\ 0)$ または $(2\pi a,\ 0)$

(3)　$\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}=(a(1+\cos t),\ -a\sin t),\ \overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\cdot\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}=0$

(4)　$L_{\mathrm{P}}=4\sqrt{2}a,\ L_{\mathrm{Q}}=4(2-\sqrt{2})a$

3

(1)　証明は省略

(2)　線分 AB の垂直二等分線

(3)　$z_1=0,\ z_2=\dfrac{2t}{1-t^2}$

(4)　$m=\dfrac{t}{1-t^2},\ |z-m|=\left|\dfrac{t}{1-t^2}\right|$，$F$ は点 M を中心とした半径 $\dfrac{t}{|1-t^2|}$ の円

4

(1)　$F_2(x)=-\dfrac{x^2}{2}e^{-x}+F_1(x),\ F_1(x)=-xe^{-x}+F_0(x)$

(2)　$F_0(x)=1-e^{-x},\ F_1(x)=1-(x+1)e^{-x},\ F_2(x)=1-\left(\dfrac{x^2}{2}+x+1\right)e^{-x}$

(3)　$F_n(x)=-\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}+F_{n-1}(x)\ (n\geqq 1),\ F_n(x)=1-e^{-x}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\ (n\geqq 0)$

(4)　$p^{(k)}(x)=\dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$，証明は省略

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto