

## 2018年度 群馬大学 (前期)

医学部

試験時間：120分

全問必答

**1**  $xy$  平面上で、自然数  $n$  に対し単位円上の点  $(\cos(\sqrt{2}\pi n), \sin(\sqrt{2}\pi n))$  を  $P_n$  とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) 自然数  $n$  と  $m$  が異なるならば、点  $P_n$  と  $P_m$  は異なることを示せ。
- (2)  $x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$  の範囲に属する点  $P_n$  は無限に多く存在することを示せ。

**2** 関数  $f(x) = xe^{-x}$  について以下の問いに答えよ。

- (1) すべての実数  $x$  について、不等式  $f(x) \leq \frac{1}{e}$  が成り立つことを証明せよ。
- (2) 曲線  $y = f(x)$  と 2 直線  $x = 0, y = \frac{1}{e}$  で囲まれた部分  $D$  の面積を求めよ。
- (3) (2) の  $D$  を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

**3**  $t = \cos\theta$  とする。自然数  $n$  について、ド・モアブルの定理  $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$  が成り立つことにより  $\cos n\theta$  を  $t$  の  $n$  次多項式として表すことができる。この多項式を  $f_n(t)$  とし、変数  $t$  についての  $f_n(t)$  の導関数を  $f'_n(t)$  とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1)  $f_6(t)$  を求めよ。
- (2) 自然数  $m$  について  $f_{2m}(t)$  の  $t^{2m}$  の係数を求めよ。
- (3)  $f_n(t)^2 + (1-t^2) \left\{ \frac{1}{n} f'_n(t) \right\}^2 = 1$  が成り立つことを示せ。

**4**  $a^2 + b^2 = c^2$  を満たす 3 つの自然数  $a, b, c$  の組  $(a, b, c)$  を考える。以下の問いに答えよ。

- (1)  $a$  と  $b$  の差は 1 であり、 $b$  と  $c$  の差が 1 であるとき  $(a, b, c)$  の組をすべて求めよ。
- (2)  $b$  は 2 の累乗であり、 $b$  と  $c$  の差が 1 であるとき  $(a, b, c)$  の組をすべて求めよ。

5 四面体  $OABC$  において  $\triangle ABC$  の重心を  $G$  とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$  とする。辺  $OC$  上に点  $P$  をとり、 $\overrightarrow{OP} = t\vec{c}$  ( $0 < t < 1$ ) とする。さらに  $\triangle ABP$  と線分  $OG$  との交点を  $X$  とし、 $\overrightarrow{OX} = s\overrightarrow{OG}$  ( $0 < s < 1$ ) とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{PX}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  と  $t$ ,  $s$  を用いて表せ。
- (2) 2 点  $P$ ,  $X$  を結ぶ直線と線分  $AB$  との交点  $M$  が線分  $AB$  の中点であることを証明せよ。
- (3)  $\triangle OMC$  において 2 点  $C$ ,  $X$  を結ぶ直線と線分  $OM$  との交点を  $N$  とする。 $NX : XC = 2 : 5$  のとき  $t$  と  $s$  の値を求めよ。

## 2018年度 群馬大学 (前期)

医学部

(略解)

 証明, 図示などは省略**1**

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

**2**

(1) 証明は省略

(2)  $\frac{3}{e} - 1$

(3)  $\frac{11 - 4e}{e} \pi$

**3**

(1)  $f_6(t) = 32t^6 - 48t^4 + 18t^2 - 1$

(2)  $2^{2m-1}$

(3) 証明は省略

**4**

(1)  $(a, b, c) = (3, 4, 5)$

(2)  $(a, b, c) = (3, 4, 5)$

**5**

(1)  $\vec{PX} = \frac{s}{3} \vec{a} + \frac{s}{3} \vec{b} + \left(\frac{s}{3} - t\right) \vec{c}$

(2) 証明は省略

(3)  $t = \frac{2}{3}, s = \frac{6}{7}$