

2018年度 群馬大学 (前期)

医学部

試験時間：120 分

全問必答

1 xy 平面上で、自然数 n に対し単位円上の点 $(\cos(\sqrt{2}\pi n), \sin(\sqrt{2}\pi n))$ を P_n とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) 自然数 n と m が異なるならば、点 P_n と P_m は異なることを示せ。
- (2) $x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲に属する点 P_n は無限に多く存在することを示せ。

2 関数 $f(x) = xe^{-x}$ について以下の問いに答えよ。

- (1) すべての実数 x について、不等式 $f(x) \leq \frac{1}{e}$ が成り立つことを証明せよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = 0, y = \frac{1}{e}$ で囲まれた部分 D の面積を求めよ。
- (3) (2) の D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

3 $t = \cos \theta$ とする。自然数 n について、ド・モアブルの定理 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ が成り立つことにより $\cos n\theta$ を t の n 次多項式として表すことができる。この多項式を $f_n(t)$ とし、変数 t についての $f_n(t)$ の導関数を $f'_n(t)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) $f_6(t)$ を求めよ。
- (2) 自然数 m について $f_{2m}(t)$ の t^{2m} の係数を求めよ。
- (3) $f_n(t)^2 + (1-t^2) \left\{ \frac{1}{n} f'_n(t) \right\}^2 = 1$ が成り立つことを示せ。

4 $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす 3 つの自然数 a, b, c の組 (a, b, c) を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) a と b の差は 1 であり、 b と c の差が 1 であるとき (a, b, c) の組をすべて求めよ。
- (2) b は 2 の累乗であり、 b と c の差が 1 であるとき (a, b, c) の組をすべて求めよ。


5 四面体 $OABC$ において $\triangle ABC$ の重心を G とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。辺 OC 上に点 P をとり、 $\overrightarrow{OP} = t\vec{c}$ ($0 < t < 1$) とする。さらに $\triangle ABP$ と線分 OG との交点を X とし、 $\overrightarrow{OX} = s\overrightarrow{OG}$ ($0 < s < 1$) とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) \overrightarrow{PX} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} と t , s を用いて表せ。
- (2) 2 点 P , X を結ぶ直線と線分 AB との交点 M が線分 AB の中点であることを証明せよ。
- (3) $\triangle OMC$ において 2 点 C , X を結ぶ直線と線分 OM との交点を N とする。 $NX : XC = 2 : 5$ のとき t と s の値を求めよ。

2018年度 群馬大学 (前期)

医学部

(略解)

 証明, 図示などは省略**1**

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

2

(1) 証明は省略

(2) $\frac{3}{e} - 1$

(3) $\frac{11 - 4e}{e} \pi$

3

(1) $f_6(t) = 32t^6 - 48t^4 + 18t^2 - 1$

(2) 2^{2m-1}

(3) 証明は省略

4

(1) $(a, b, c) = (3, 4, 5)$

(2) $(a, b, c) = (3, 4, 5)$

5

(1) $\vec{PX} = \frac{s}{3} \vec{a} + \frac{s}{3} \vec{b} + \left(\frac{s}{3} - t\right) \vec{c}$

(2) 証明は省略

(3) $t = \frac{2}{3}, s = \frac{6}{7}$