2018年度　筑波大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。放物線 $y=x^2$ 上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(\tan\theta,\ \tan^2\theta)$，$\mathrm{B}(-\tan\theta,\ \tan^2\theta)$ をとる。三角形 OAB の内心の y 座標を p とし，外心の y 座標を q とする。また，正の実数 a に対して，直線 $y=a$ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ で表す。

(1)　p，q を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(2)　$\dfrac{S(p)}{S(q)}$ が整数であるような $\cos\theta$ の値をすべて求めよ。

2　放物線 $C: y=x^2+ax+b$ が 2 直線 $\ell_1: y=px$（$p>0$），$\ell_2: y=qx$（$q<0$）と接している。また，C と ℓ_1，ℓ_2 で囲まれた図形の面積を S とする。

(1)　a，b を p，q を用いてそれぞれ表せ。

(2)　S を p，q を用いて表せ。

(3)　ℓ_1，ℓ_2 が直交するように p，q が動くとき，S の最小値を求めよ。

3　正三角形 OAB に対し，直線 OA 上の点 P_1，P_2，P_3，$\cdots$ および直線 OB 上の点 Q_1，Q_2，Q_3，$\cdots$ を，次の(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)を満たすようにとる。

(Ⅰ)　$\mathrm{P}_1=\mathrm{A}$ である。

(Ⅱ)　線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$，$\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$，$\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3$，$\cdots$ はすべて直線 OA に垂直である。

(Ⅲ)　線分 $\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$，$\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_3$，$\mathrm{Q}_3\mathrm{P}_4$，$\cdots$ はすべて直線 OB に垂直である。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。点 O を基準とする位置ベクトルが，整数 k，l によって $k\vec{a}+l\vec{b}$ と表される点全体の集合を S とする。n を自然数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=x\vec{a}+y\vec{b}$ で定まる点 R が線分 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ 上にあるとき，x を y を用いて表せ。また，線分 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ 上にある S の点の個数を求めよ。

(3)　三角形 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$ の周または内部にある S の点の個数を求めよ。

4　2 つの曲線

$C_1: y = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sin x}$　$(0<x<\pi)$,

$C_2: y = \sqrt{2}(\sin x - \cos x)$　$(0<x<\pi)$

について以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点の x 座標を求めよ。

(2)　曲線 C_1 と曲線 C_2 とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V が π^2 であることを示せ。

5　$f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}\,dt$ とし，$c \geqq \pi$ とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = c$，$a_{n+1} = f(a_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で定める。

(1)　$f(\pi)$ を求めよ。また，$x \geqq \pi$ のとき，$0<f'(x) \leqq \dfrac{2}{\pi}$ が成り立つことを示せ。

(2)　すべての自然数 n に対して，$a_n \geqq \pi$ が成り立つことを示せ。

(3)　すべての自然数 n に対して，$|a_{n+1}-\pi| \leqq \dfrac{2}{\pi}|a_n - \pi|$ が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

6　複素数 α に対して，複素数平面上の 3 点 O(0)，A(α)，B(α^2) を考える。次の条件 (I)，(II)，(III)をすべて満たす複素数 α 全体の集合を S とする。

(I)　α は実数でも純虚数でもない。

(II)　$|\alpha|>1$ である。

(III)　三角形 OAB は直角三角形である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　α が S に属するとき，$\angle\mathrm{OAB} = \dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ。

(2)　集合 S を複素数平面に図示せよ。

(3)　x，y を $\alpha^2 = x + yi$ を満たす実数とする。α が S を動くとき，xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求め，図示せよ。

2018年度　筑波大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$p = \dfrac{1-\cos\theta}{\cos^2\theta}$，$q = \dfrac{1}{2\cos^2\theta}$

(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$，$1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

2

(1)　$a = \dfrac{p+q}{2}$，$b = \dfrac{(p-q)^2}{16}$

(2)　$S = \dfrac{1}{96}(p-q)^3$

(3)　最小値：$\dfrac{1}{12}$（$p=1$，$q=-1$）

3

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n} = 4^{n-1}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} = 2\cdot 4^{n-1}\vec{b}$

(2)　$x = -2y + 4^n$，$2\cdot 4^{n-1}+1$ 個

(3)　$4^{2n-1}+4^n+1$

4

(1)　$x = \dfrac{3}{8}\pi$，$\dfrac{7}{8}\pi$

(2)　証明は省略

5

(1)　$f(\pi) = \pi$，証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　証明は省略，π

6

(1)　証明は省略

(2)　図示は省略

(3)　放物線：$x = 1 - \dfrac{y^2}{4}$ ただし，$(1, 0)$ を除く。図示は省略