

2018年度 神戸大学 (前期)

医学部

試験時間：120 分

📖 全問必答

1 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とする。辺 OA を $1-t:t$ に内分する点を P, 辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を Q, 辺 BC の中点を R とする。また, $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$ とする。以下の間に答えよ。

- (1) \vec{QP} と \vec{QR} を $t, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) $\angle PQR = \frac{\pi}{2}$ のとき, t の値を求めよ。
- (3) t が (2) で求めた値をとるとき, $\triangle PQR$ の面積を求めよ。

2 k を 2 以上の整数とする。また

$$f(x) = \frac{1}{k} \left((k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}} \right)$$

とおく。以下の間に答えよ。

- (1) $x > 0$ において, 関数 $y = f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ。
- (2) 数列 $\{x_n\}$ が $x_1 > 1, x_{n+1} = f(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たすとき, $x_n > 1$ を示せ。
- (3) (2) の数列 $\{x_n\}$ に対し,

$$x_{n+1} - 1 < \frac{k-1}{k} (x_n - 1)$$

を示せ。また $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。

3 さいころを 3 回ふって, 1 回目に出た目の数を a , 2 回目と 3 回目に出た目の数の和を b とし, 2 次方程式

$$x^2 - ax + b = 0 \dots\dots (*)$$

を考える。以下の間に答えよ。

- (1) (*) が $x = 1$ を解にもつ確率を求めよ。
- (2) (*) が整数を解にもつとする。このとき (*) の解は共に正の整数であり, また少なくとも 1 つの解は 3 以下であることを示せ。
- (3) (*) が整数を解にもつ確率を求めよ。

4 整式 $f(x)$ は実数を係数にもつ 3 次式で, 3 次の係数は 1, 定数項は -3 とする。方程式 $f(x) = 0$ は, 1 と虚数 α, β を解にもつとし, α の実部は 1 より大きく, α の虚部は正とする。複素数平面上で $\alpha, \beta, 1$ が表す点を順に A, B, C とし, 原点を O とする。以下の間に答えよ。

- (1) α の絶対値を求めよ。
- (2) θ を α の偏角とする。 $\triangle ABC$ の面積 S を θ を用いて表せ。
- (3) S を最大にする θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とそのときの整式 $f(x)$ を求めよ。

5 座標空間において、 O を原点とし、 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(1, 1, 0)$ とする。 $\triangle OAB$ を直線 OC の周りに 1 回転してできる回転体を L とする。以下の問に答えよ。

(1) 直線 OC 上にない点 $P(x, y, z)$ から直線 OC におろした垂線を PH とする。 \vec{OH} と \vec{HP} を x, y, z の式で表せ。

(2) 点 $P(x, y, z)$ が L の点であるための条件は

$$z^2 \leq 2xy \text{ かつ } 0 \leq x + y \leq 2$$

であることを示せ。

(3) $1 \leq a \leq 2$ とする。 L を平面 $x = a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) 立体 $\{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in L, 1 \leq x \leq 2\}$ の体積を求めよ。

2018年度 神戸大学 (前期)

医学部

(略解)

☞ 証明, 図示などは省略

1

(1) $\overrightarrow{QP} = (1-t)\vec{a} - t\vec{b}$, $\overrightarrow{QR} = \left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

(2) $t = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$

(3) $t = \frac{1}{2}$ のとき, $\frac{1}{8}$, $t = \frac{2}{3}$ のとき, $\frac{\sqrt{21}}{36}$

2

(1) 漸近線: $x = 0$, $y = \frac{k-1}{k}x$, 図示は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略, 1

3

(1) $\frac{5}{108}$

(2) 証明は省略

(3) $\frac{1}{8}$

4

(1) $|\alpha| = \sqrt{3}$

(2) $S = \frac{3}{2} \sin 2\theta - \sqrt{3} \sin \theta$

(3) $\theta = \frac{\pi}{6}$, $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 3$

5

(1) $\overrightarrow{OH} = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, 0\right)$, $\overrightarrow{HP} = \left(\frac{x-y}{2}, -\frac{x-y}{2}, z\right)$

(2) 証明は省略

(3) $S(a) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \sqrt{a(2-a)^3}$

(4) $\frac{(3\pi - 4)\sqrt{2}}{9}$