2018 年度　東北大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　xy 平面における 2 つの放物線 $C : y = (x-a)^2 + b$，$D : y = -x^2$ を考える。

(1)　C と D が異なる 2 点で交わり，その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a，b が動くとき，C の頂点 (a, b) の軌跡を図示せよ。

(2)　実数 a，b が (1) の条件を満たしながら動くとき，C と D の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め，図示せよ。

2　n を 2 以上，a を 1 以上の整数とする。箱の中に，1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ，合計 n 枚入っている。この箱から，1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す，という試行を a 回繰り返す。ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする。

(1)　$p(1)$ と $p(n)$ を求めよ。

(2)　$p(2)$ を求めよ。

(3)　n が 3 以上の整数のとき $p(3)$ を求めよ。

3　整数 a，b は等式

$$3^a - 2^b = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たしているとする。

(1)　a，b はともに正となることを示せ。

(2)　$b>1$ ならば，a は偶数であることを示せ。

(3)　① を満たす整数の組 (a, b) をすべてあげよ。

4　三角形 ABC の内接円の半径を r，外接円の半径を R とし，$h = \dfrac{r}{R}$ とする。また，$\angle\mathrm{A} = 2\alpha$，$\angle\mathrm{B} = 2\beta$，$\angle\mathrm{C} = 2\gamma$ とおく。

(1)　$h = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ となることを示せ。

(2)　三角形 ABC が直角三角形のとき $h \leqq \sqrt{2} - 1$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどのような場合か。

(3)　一般の三角形 ABC に対して $h \leqq \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどのような場合か。

5　α を複素数とする。複素数 z の方程式

$$z^2 - \alpha z + 2i = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

について，以下の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位である。

(1)　方程式 ① が実数解をもつように α が動くとき，点 α が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

(2)　方程式 ① が絶対値 1 の複素数を解にもつように α が動くとする。原点を中心に α を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点を表す複素数を β とするとき，点 β が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

6　xy 平面内の図形

$$S : \begin{cases} x + y^2 \leqq 2 \\ x + y \geqq 0 \\ x - y \leqq 2 \end{cases}$$

を考える。図形 S を直線 $y = -x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を V とする。

(1)　S を xy 平面に図示せよ。

(2)　V を求めよ。

2018年度　東北大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1） 図示は省略　　（2） 図示は省略

2

（1） $p(1)=\dfrac{1}{n}$，$p(n)=\left(\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$　　（2） $p(2)=\dfrac{(n+2)(n-1)}{2n^2}$

（3） $p(3)=\dfrac{(n-1)(n-2)(2n+3)}{6n^3}$

3

（1） 証明は省略　　（2） 証明は省略　　（3） $(a,\ b)=(1,\ 1)$，$(2,\ 3)$

4

（1） 証明は省略

（2） 証明は省略，等号成立は $\triangle\mathrm{ABC}$ が直角二等辺三角形のとき

（3） 証明は省略，等号成立は $\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形のとき

5

（1） 図示は省略　　（2） 図示は省略

6

（1） 図示は省略　　（2） $V=\dfrac{58\sqrt{2}}{15}\pi$