# 2018 年度　東京医科歯科大学（前期）

## 医学部　試験時間：90 分

全問必答

**1**　0 以上の整数 $x$, $y$ に対して，$R(x,\ y)$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} xy=0 \text{ のとき，} R(x,\ y)=0 \\ xy \neq 0 \text{ のとき，} x \text{ を } y \text{ で割った余りを } R(x,\ y) \text{ とする。} \end{cases}$$

正の整数 $a$, $b$ に対して，数列 $\{r_n\}$ を次のように定義する。

$$r_1=R(a,\ b),\quad r_2=R(b,\ r_1),$$
$$r_{n+1}=R(r_{n-1},\ r_n)\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

また，$r_n=0$ となる最小の $n$ を $N$ で表す。例えば $a=7$，$b=5$ のとき $N=3$ である。

次に，数列 $\{f_n\}$ を次のように定義する。

$$f_1=f_2=1,\ f_{n+1}=f_n+f_{n-1}\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$a=f_{102}$，$b=f_{100}$ のとき，$N$ を求めよ。

(2)　正の整数 $a$，$b$ について，$a$ が $b$ で割り切れないとき，$r_1 \geqq f_N$ が成立することを示せ。

(3)　2 以上の整数 $n$ について，$10f_n<f_{n+5}$ が成立することを示せ。

(4)　正の整数 $a$，$b$ について，$a$ が $b$ で割り切れないとき，

$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{r_k}<\frac{259}{108}$$

が成立することを示せ。

**2**　$xyz$ 空間において，連立不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$，$|z| \leqq 1$ の表す領域を $Q$ とし，原点 O$(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 $r$ の球面を $S_0$ とする。さらに，点 A$(1,\ 1,\ 1)$, B$(1,\ -1,\ -1)$, C$(-1,\ 1,\ -1)$, D$(-1,\ -1,\ 1)$ を中心とし，$S_0$ に外接する球面を，それぞれ $S_A$，$S_B$，$S_C$，$S_D$ とする。このとき以下の各問いに答えよ。ここで，「球面 $X$ が球面 $Y$ に外接する」とは，$X$ と $Y$ が互いにその外部にあって，1 点を共有することである。

(1)　$S_A$ と $S_B$ が共有点を持つとき，$r$ の最大値 $r_1$ を求めよ。

(2)　$S_0$，$S_A$，$S_B$，$S_C$，$S_D$ およびそれらの内部の領域の和集合と，$Q$ との共通部分の体積を $V(r)$ とする。区間 $r_1 \leqq r \leqq 1$ において，$V(r)$ が最小となる $r$ の値 $r_2$ を求めよ。ここで $r_1$ は (1) で求めた値とする。

(3)　$S_0$ と共有点を持つどんな平面も，$S_A$，$S_B$，$S_C$，$S_D$ のいずれかと共有点を持つとき，$r$ の最大値 $r_3$ を求めよ。

**3**　関数 $f(x)=x-\log(1+x)$ について，以下の各問いに答えよ。ここで log は自然対数を表す。また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いてよい。

(1)　$p$ を実数とするとき，$f(x)=p$ を満たす実数 $x$ の個数を求めよ。

以下，$f(x)$ の定義域を $x\geqq 0$ に制限した関数の逆関数を $g(x)$ とする。

(2)　$u$ を正の実数とする。$p\geqq 0$ のとき，

$$p\leqq g(p)\leqq\frac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u$$

を示せ。

(3)　$p$ を正の実数とし，$xy$ 平面において，曲線 $y=g(x)$ と直線 $x=p$ の交点を通り，直線 $y=x$ に平行な直線を $\ell$ とする。また，$\ell$ と $x$ 軸および曲線 $y=g(x)$ によって囲まれた図形の面積を $S$ とする。このとき，$S$ を $p$ を用いて表せ。

# 2018年度　東京医科歯科大学（前期）

## 医学部　（略解）

証明，図示などは省略

**1**

（1）$N=99$　（2）証明は省略　（3）証明は省略　（4）証明は省略

**2**

（1）$r_1=\sqrt{3}-\sqrt{2}$　（2）$r_2=\sqrt{6}-\sqrt{3}$　（3）$r_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

**3**

（1）$\begin{cases} 0 & (p<0 \text{ のとき}) \\ 1 & (p=0 \text{ のとき}) \\ 2 & (p>0 \text{ のとき}) \end{cases}$　（2）証明は省略　（3）$S=p$