2018年度　山形大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　原点を出発点とし，x 軸上を動く点 P がある。白球 6 個と黒球 4 個が入っている袋から球を 1 個ずつ取り出す。取り出した球が白球であれば点 P は正の方向に 1 だけ進み，黒球であれば点 P は負の方向に 1 だけ進むこととする。ただし，取り出した球は袋に戻さない。このとき，次の問に答えよ。

(1)　球を 2 回取り出すとき，点 P が原点にある確率を求めよ。

(2)　球を 8 回取り出すとき，点 P の座標が 2 である確率を求めよ。

(3)　球を 6 回取り出すとき，2 回目かつ 6 回目で点 P が原点にある確率を求めよ。

(4)　球を 6 回取り出すとき，6 回目で点 P の座標が初めて 4 となる確率を求めよ。

2　座標空間において，点 O を原点とし，4 点 A$(1,\ 2,\ 1)$，B$(2,\ -1,\ -3)$，C$(1,\ 1,\ 1)$，D$(3,\ 2,\ -1)$ がある。このとき，次の問に答えよ。

(1)　$\angle \mathrm{AOB} = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\triangle \mathrm{AOB}$ の面積を求めよ。

(3)　2 点 O，A を通る直線を L_1，2 点 O，B を通る直線を L_2 とする。直線 L_1 上に点 E，直線 L_2 上に点 F をとる。ここで，点 E と点 F は異なるとする。いま，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は垂直で，2 点 E，F を通る直線 L_3 が点 D を通るとき，次の (i)，(ii) に答えよ。

(i)　直線 L_3 と xy 平面との交点の座標を求めよ。

(ii)　点 B と直線 L_3 上の点との距離の最小値を求めよ。

3　曲線 $y = \log x \quad (x>0)$ を C とする。$a>1$ とし，点 $(1,\ 0)$ における曲線 C の接線を L_1，点 A$(a,\ \log a)$ における曲線 C の接線を L_a とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　不定積分 $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$ を求めよ。

(2)　直線 L_a の方程式および直線 L_1 と直線 L_a の交点の x 座標を求めよ。

(3)　2 直線 L_1，L_a と曲線 C で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{S(a)}{a}$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{(\log a)^k}{a} = 0$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を用いてよい。

(4)　2 直線 L_1，L_a と曲線 C で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(a)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{V(a)}{a\log a}$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{(\log a)^k}{a} = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を用いてよい。

4　i を虚数単位とし，複素数 α に対してその共役な複素数を $\overline{\alpha}$ で表す。$z_1 = i$ とし，複素数 z_1，z_2，$\cdots$，z_n，$\cdots$ が

$$z_{n+1} = z_n + \left(-\frac{4}{5}i\right)^n \times i \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。また，$\gamma_n = -i \times \overline{z_n}$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　複素数 z_2，z_4 を求めよ。

(2)　複素数 γ_2，γ_4 を求めよ。

(3)　自然数 m に対して，複素数 γ_{2m} の実部を a_m，虚部を b_m とする。極限値 $\lim_{m \to \infty} a_m$ と $\lim_{m \to \infty} b_m$ を求めよ。

(4)　$a = \lim_{m \to \infty} a_m$，$b = \lim_{m \to \infty} b_m$ とし，$\gamma = a + bi$，$z = -i \times \overline{\gamma}$ とする。複素数平面において，点 z を点 γ のまわりに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転して得られる点を表す複素数 w を求めよ。

2018年度　山形大学（前期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $\dfrac{8}{15}$　(2) $\dfrac{8}{15}$　(3) $\dfrac{8}{35}$　(4) $\dfrac{8}{105}$

2

(1) $-\dfrac{\sqrt{21}}{14}$

(2) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

(3) (i)　(2, 2, 0)　(ii)　最小値：$\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

3

(1) $x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C$　（C は積分定数）

(2) $L_a : y = \dfrac{1}{a}x - 1 + \log a$，$x = \dfrac{a\log a}{a-1}$

(3) $\dfrac{1}{2}$

(4) π

4

(1) $z_2 = \dfrac{4}{5} + i$，$z_4 = \dfrac{36}{125} + \dfrac{9}{25}i$

(2) $\gamma_2 = -1 - \dfrac{4}{5}i$，$\gamma_4 = -\dfrac{9}{25} - \dfrac{36}{125}i$

(3) $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = -\dfrac{25}{41}$，$\lim\limits_{m\to\infty} b_m = -\dfrac{20}{41}$

(4) $w = \dfrac{5(1+9\sqrt{3})}{82}(-1+i)$