2018 年度　千葉大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　初項が 1 で公差が 6 である等差数列 1，7，13，$\cdots$ の第 n 項を a_n とし，また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 3，7，11，$\cdots$ の第 m 項を b_m とする。2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_l\}$ とする。したがって $c_1 = 7$ であり，また数列 $\{d_l\}$ のはじめの 5 項は 1，3，7，11，13 となる。

(1)　数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。

(2)　数列 $\{d_l\}$ の一般項を求めよ。

(3)　数列 $\{d_l\}$ の初項から第 l 項までの和 $S_l = \sum_{i=1}^{l} d_i$ を求めよ。

2　正方形 ABCD の辺を除く内部に，PA ⊥ PB を満たす点 P がある。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を $x\overrightarrow{\mathrm{PA}} + y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ と表すとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$ とするとき，x，y を α を用いて表せ。

(2)　点 P が題意の条件を満たしながら動くとき，(1) で求めた x，y の和 $x + y$ の最大値を求め，そのときの P がどのような点かを答えよ。

3

(1)　次の定積分を求めよ。

$$f(x) = \int_0^x e^{t-x}\sin(t + x)\,dt$$

(2)　(1) で求めた x の関数 $f(x)$ に対し，極限値 $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ を求めよ。

4　n を 3 以上の自然数として，n 枚のカード C_1，C_2，$\cdots$，C_{n-1}，C_n がある。初めにこれらのカードを下から C_n，C_{n-1}，$\cdots$，C_2，C_1 の順番に積み上げておく。いちばん上にあるカードが C_1 で，いちばん下が C_n である。積み上げられたカードに対して以下の試行を繰り返す。いちばん上にあるカードを取ってそれを残りのいずれかのカードの下に入れるか，またはいちばん上に戻す。どの位置におくかの確率はすべて等しいものとする。

　$k = 1$，2，$\cdots$ について，k 回の試行の後にカード C_1 が上から数えて l 番目にある確率を $P(k, l)$ $(l = 1,$ $2, \cdots, n)$ で表し，また k 回の試行の後にカード C_2 が上から数えて l 番目にある確率を $Q(k, l)$ で表す。例えば $P(1, l)$ は l によらず $\dfrac{1}{n}$ に等しい。以下の問いに答えよ。

(1)　$P(2, l)$ を求めよ。

(2)　$P(k, l)$ を求めよ。

(3)　$Q(k, l)$ を求めよ。

5　複素数 $z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ に対し，$\alpha=z+z^8$ とおく。$f(x)$ は整数係数の 3 次多項式で，3 次の係数が 1 であり，かつ $f(\alpha)=0$ となるものとする。ただし，すべての係数が整数である多項式を，整数係数の多項式という。

(1)　$f(x)$ を求めよ。ただし，$f(x)$ がただ 1 つに決まることは証明しなくてよい。

(2)　3 次方程式 $f(x)=0$ の α 以外の 2 つの解を，α の 2 次以下の，整数係数の多項式の形で表せ。

2018年度　千葉大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$c_k = 12k - 5$

(2)　$d_l = \begin{cases} 3l - 2 & (l \text{ が奇数のとき}) \\ 3l - 1 & (l \text{ が } 4 \text{ の倍数のとき}) \\ 3l - 3 & (l \text{ が } 4 \text{ の倍数でない偶数のとき}) \end{cases}$

(3)　$S_l = \begin{cases} \dfrac{3}{2}l^2 - \dfrac{1}{2}l & (l \text{ を } 4 \text{ で割った余りが } 0,\ 1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{3}{2}l^2 - \dfrac{1}{2}l - 1 & (l \text{ を } 4 \text{ で割った余りが } 2,\ 3 \text{ のとき}) \end{cases}$

2

(1)　$x = -\alpha,\ y = 1 - \dfrac{1}{\alpha}$

(2)　最大値：-1，P が正方形の 2 本の対角線の交点のとき

3

(1)　$f(x) = \dfrac{1}{2}\{e^{-x}(\cos x - \sin x) + \sin 2x - \cos 2x\}$

(2)　0

4

(1)　$P(2,\ l) = \dfrac{1}{n}$　　(2)　$P(k,\ l) = \dfrac{1}{n}$

(3)　$Q(k,\ 1) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{n-2}{n}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$，$Q(k,\ 2) = \dfrac{1}{n}$，$Q(k,\ l) = \dfrac{1}{n} - \left(\dfrac{1}{n}\right)^k$ $(l = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ n)$

5

(1)　$f(x) = x^3 - 3x + 1$　　(2)　$\alpha^2 - 2,\ -\alpha^2 - \alpha + 2$