

2018年度 北海道大学（前期）

医学部

試験時間：120 分

 全問必答

- 1** 座標空間の4点 $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $B(0, 0, 1)$, $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$, $D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$ に対し、
 $\vec{p} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}$, $\vec{q} = (1-s)\vec{OC} + s\vec{OD}$

とおく。ただし、 O は原点、 s と t は実数とする。

- (1) $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$ と内積 $\vec{p} \cdot \vec{q}$ を s , t で表せ。
- (2) $t = \frac{1}{2}$ のとき、ベクトル $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $\frac{3}{4}\pi$ となるような s の値を求めよ。
- (3) s と t が実数を動くとき、 $|\vec{p} - \vec{q}|$ の最小値を求めよ。

- 2** $z + \frac{4}{z}$ が実数となるような 0 と異なる複素数 z の全体を D とする。

- (1) D を複素数平面上に図示せよ。
- (2) k を実数とする。 D に属する z で方程式

$$k\left(z + \frac{4}{z} + 8\right) = i\left(z - \frac{4}{z}\right)$$

を満たすものが存在するような k の値の範囲を求めよ。ただし、 i は虚数単位を表す。

- 3** 数字の 2 が書かれたカードが 2 枚、同様に、数字の 0, 1, 8 が書かれたカードがそれぞれ 2 枚、あわせて 8 枚のカードがある。これらから 4 枚を取り出し、横一列に並べてできる自然数を n とする。ただし、0 のカードが左から 1 枚または 2 枚現れる場合は、 n は 3 桁または 2 桁の自然数とそれぞれ考える。例えば、左から順に 0, 0, 1, 1 の数字のカードが並ぶ場合の n は 11 である。

- (1) a, b, c, d は整数とする。 $1000a + 100b + 10c + d$ が 9 の倍数になることと $a + b + c + d$ が 9 の倍数になることは同値であることを示せ。
- (2) n が 9 の倍数である確率を求めよ。
- (3) n が偶数であったとき、 n が 9 の倍数である確率を求めよ。

4 座標平面上に 3 点 $O(0, 0)$, $A\left(\frac{15}{2}, 0\right)$, $B(11, 11)$ がある。条件

$$BQ \geq OQ \geq 2AQ$$

を満たす点 $Q(x, y)$ の全体を D とする。

- (1) D を座標平面上に図示せよ。また, $BQ = OQ = 2AQ$ となるすべての点 Q の座標を求めよ。
- (2) $0 < p \leq 11$ とし, P を点 $(p, 11)$ とする。条件 $OQ \geq PQ$ を満たす D の点 Q が存在するような p の値の範囲を求めよ。

5 2 つの関数

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} - \frac{\pi}{2}$$

がある。

- (1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, 不等式 $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$ が成り立つことを示せ。
- (2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, 不等式 $g(x) \leq f(x)$ が成り立つことを示せ。
- (3) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲において, 2 つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ および y 軸が囲む部分の面積を求めよ。

2018年度 北海道大学（前期）

医学部

（略解）

 証明，図示などは省略**1**

$$(1) \quad |\vec{p}| = \sqrt{2t^2 - 2t + 1}, \quad |\vec{q}| = \sqrt{4s^2 - 4s + 2}, \quad \vec{p} \cdot \vec{q} = -t$$

$$(2) \quad s = \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad \text{最小値} : \sqrt{2}$$

2

(1) 図示は省略

$$(2) \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq k \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3

(1) 証明は省略

$$(2) \quad \frac{9}{70}$$

$$(3) \quad \frac{1}{7}$$

4

(1) 図示は省略，(7, 4)，(14, -3)

$$(2) \quad 3 \leq p \leq 11$$

5

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

$$(3) \quad 1 + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^3}{16}$$