2017 年度　筑波大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　a を正の実数とする。2 つの関数

$$y=\frac{1}{3}ax^2-2a^2x+\frac{7}{3}a^3,\ y=-\frac{2}{3}ax^2+2a^2x-\frac{2}{3}a^3$$

のグラフは，2 点 A，B で交わる。但し，A の x 座標は B の x 座標より小さいとする。また，2 点 A，B を結ぶ線分の垂直二等分線を ℓ とする。

(1)　2 点 A，B の座標を a を用いて表せ。

(2)　直線 ℓ の方程式を a を用いて表せ。

(3)　原点と直線 ℓ の距離 d を a を用いて表せ。また，$a>0$ の範囲で d を最大にする a の値を求めよ。

2　a，b，c を実数とし，β，m をそれぞれ $0<\beta<1$，$m>0$ を満たす実数とする。また，関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\beta$，$-\beta$ で極値をとり，$f(-1)=f(\beta)=-m$，$f(1)=f(-\beta)=m$ を満たすとする。

(1)　a，b，c，および β，m の値を求めよ。

(2)　関数 $g(x)=x^3+px^2+qx+r$ は，$-1\leqq x\leqq 1$ に対して $f(-1)\leqq g(x)\leqq f(1)$ を満たすとする。$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくとき，$h(-1)$，$h(-\beta)$，$h(\beta)$，$h(1)$ それぞれと 0 との大きさを比較することにより，$h(x)$ を求めよ。

3　数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}=3{a_{n+1}}^2-6a_{n+1}a_n+3{a_n}^2+a_{n+1}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

を満たすとする。また，$b_n=a_{n+1}-a_n$　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$b_n\geqq 0$　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を示せ。

(2)　b_n　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$ の一の位の数が 2 であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3)　a_{2017} の一の位の数を求めよ。

4　関数

$$f(x)=2x^2-9x+14-\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}\quad (x>0)$$

について以下の問いに答えよ。

(1)　方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ のすべての極値を求めよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

5　xy 平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また，実数 a に対して，a 以下の最大の整数を $[a]$ で表す。記号 $[\ ]$ をガウス記号という。以下の問いでは N を自然数とする。

(1)　n を $0\leqq n\leqq N$ を満たす整数とする。点 $(n,0)$ と点 $\left(n,\ N\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right)$ を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ。

(2)　直線 $y=x$ と，x 軸，および直線 $x=N$ で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を $A(N)$ とおく。このとき $A(N)$ を求めよ。

(3)　曲線 $y=N\sin\left(\frac{\pi x}{2N}\right)$ $(0\leqq x\leqq N)$ と，x 軸，および直線 $x=N$ で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を $B(N)$ とおく。(2) の $A(N)$ に対して $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{B(N)}{A(N)}$ を求めよ。

6　$0<a<\frac{\pi}{2}$ とする。複素数平面上において，原点を中心とする半径 1 の円の上に異なる 5 点 $P_1(w_1)$，$P_2(w_2)$，$P_3(w_3)$，$P_4(w_4)$，$P_5(w_5)$ が反時計まわりに並んでおり，次の 2 つの条件 (I), (II) を満たすとする。

(I)　$(\cos^2 a)(w_2-w_1)^2+(\sin^2 a)(w_5-w_1)^2=0$ が成り立つ。

(II)　$\frac{w_3}{w_2}$ と $-\frac{w_4}{w_2}$ は方程式 $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ の解である。

また，五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

(1)　五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ の頂点 P_1 における内角 $\angle P_5P_1P_2$ を求めよ。

(2)　S を a を用いて表せ。

(3)　$R=|w_1+w_2+w_3+w_4+w_5|$ とする。このとき，R^2+2S は a の値によらないことを示せ。

2017年度　筑波大学（前期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$\mathrm{A}\left(a,\ \frac{2}{3}a^3\right)$，$\mathrm{B}\left(3a,\ -\frac{2}{3}a^3\right)$　　(2)　$3x-2a^2y-6a=0$

(3)　$d=\dfrac{6a}{\sqrt{4a^4+9}}$，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

2

(1)　$a=0$，$b=-\frac{3}{4}$，$c=0$，$\beta=\frac{1}{2}$，$m=\frac{1}{4}$　　(2)　$h(x)=0$

3

(1)　証明は省略　　(2)　証明は省略　　(3)　3

4

(1)　$x=1,\ 2,\ \frac{1}{2}$　　(2)　極大値：0，極小値：$-\frac{1}{8}$　　(3)　$18\log 2-\frac{99}{8}$

5

(1)　$\left[N\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right]+1$ 個　　(2)　$A(N)=\dfrac{(N+1)(N+2)}{2}$　　(3)　$\dfrac{4}{\pi}$

6

(1)　$\dfrac{\pi}{2}$　　(2)　$S=\sin 2a+\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$　　(3)　証明は省略