

2017 年度 東北大学（前期）**医学部**

試験時間：150 分

 全問必答

1 a, b を実数とする。 $y = |x^2 - 4|$ で表される曲線を C とし、 $y = ax + b$ で表される直線を ℓ とする。

(1) ℓ が点 $(-2, 0)$ を通り、 ℓ と C がちょうど 3 つの共有点をもつような a, b の条件を求めよ。

(2) ℓ と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 (a, b) の軌跡を ab 平面上に図示せよ。

2 A 君と B 君はそれぞれ、0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている。2 人は、自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする。取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし、0 が含まれている場合は残り 2 枚のカードに書かれた数の合計とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) A 君、B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して、しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ。

(2) A 君の得点が B 君の得点より大きいときの、A 君の得点が整数ではない確率を求めよ。

3 a, b, c を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とする。

(1) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が有理数解をもつような組 (a, b, c) の総数を求めよ。

(2) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が少なくとも一つの整数解をもつような組 (a, b, c) の総数を求めよ。

4 s を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において、辺 AB を $s : 1$ に内分する点を D とし、辺 BC を $s : 3$ に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$ とするとき、 α と β を求めよ。

(2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。FG の長さが最大となるときの s を求めよ。

5 α, β, γ を複素数とし,

$$z\bar{z} + \alpha z + \beta\bar{z} + \gamma = 0 \quad \dots\dots (*)$$

を満たす複素数 z を考える。以下の問いに答えよ。

(1) z は

$$(\alpha - \bar{\beta})z - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z} + \gamma - \bar{\gamma} = 0$$

を満たすことを示せ。

(2) $|\alpha| = |\beta| \neq 0$ と仮定し, また γ は負の実数であると仮定する。このとき, $(*)$ を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を α, β を用いて表せ。

6 a, b, c を実数とし,

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \cos bx \, dx, \quad J(a, b, c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \sin bx \sin cx \, dx$$

とおく。ただし, $a \neq 0$ とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) $I(a, b)$ を求めよ。

(2) $J(a, b, c)$ を $I(a, b + c)$ と $I(a, b - c)$ を用いて表せ。

(3) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx \, dx$$

2017年度 東北大学（前期）**医学部**

（略解）

 証明，図示などは省略**1**

(1) $b = 2a, 0 < a < 4$

(2) 図示は省略

2

(1) $\frac{1}{80}$

(2) $\frac{28}{181}$

3

(1) 24 通り

(2) 22 通り

4

(1) $(\alpha, \beta) = \left(\frac{3s}{s^2 + 3s + 3}, \frac{s^2}{s^2 + 3s + 3} \right)$

(2) $s = \sqrt{3}$

5

(1) 証明は省略

(2) $\alpha \neq \bar{\beta}$ ($\bar{\alpha} \neq \beta$ でも可)**6**

(1) $I(a, b) = \frac{a}{a^2 + b^2} \left(e^{\frac{\pi a}{2}} \cos \frac{\pi b}{2} - 1 \right) + \frac{b}{a^2 + b^2} e^{\frac{\pi a}{2}} \sin \frac{\pi b}{2}$

(2) $J(a, b, c) = -\frac{1}{2} \{I(a, b+c) - I(a, b-c)\}$

(3) $e^{\frac{\pi}{2}} - 1$