2017 年度　旭川医科大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　n は正の整数とする。点 $(n,\ 0)$ を通り，曲線 $C : y = e^{-x}$ に接する直線を L_n とし，その接点を P_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　P_n の座標を求めよ。

(2)　L_n と L_{n+1} の交点を Q_n とする。Q_n の座標を求めよ。

(3)　2 直線 L_n，L_{n+1} および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_n とおくとき，級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。

2　a，b，c を実数とする。3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の 3 つの解を α，β，γ とする。これらの解は次の 4 つの条件を満たす。

(i)　$\gamma = -\dfrac{1}{2}$

(ii)　$|\alpha| = |\beta| = 1$

(iii)　α の虚部は正である

(iv)　複素数平面上の点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ は同一直線 L 上にある

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　a，b，c および α，β の値を求めよ。

(2)　点 $\mathrm{P}(z)$ が直線 L 上を動くとき，$w_1 = \dfrac{1+4z}{2z}$ で表される点 $\mathrm{Q}(w_1)$ の軌跡を複素数平面上に図示せよ。

(3)　動点 $\mathrm{R}(w_2)$ は，$\arg\left(\dfrac{\beta - w_2}{\alpha - w_2}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ を満たす。
　このとき，$\mathrm{R}(w_2)$ の軌跡を複素数平面上に図示するとともに，(2) で求めた $\mathrm{Q}(w_1)$ との距離 $|w_1 - w_2|$ のとりうる値の範囲を求めよ。

3　O を原点とする座標平面上に長さ 1 の線分 AB がある。線分 AB の端点 A は x 軸上の $x \geqq 0$ の部分を，端点 B は y 軸上の $y \geqq 0$ の部分を動くものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　線分 AB が x 軸となす角 $\angle\mathrm{OAB}$ が θ であるとき，直線 AB を L_θ で表す。直線 L_θ の方程式を求めよ。ただし，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である。

(2)　t は $0 < t \leqq 1$ を満たす定数とする。直線 $x = t$ と直線 L_θ との交点を P_θ とする。点 P_θ の y 座標が最大となる θ を α とするとき，$\cos\alpha$ を t を用いて表せ。

(3)　点 P_α の直交座標 $(x,\ y)$ を α を用いて表せ。また $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，点 P_α の極座標を求めよ。

(4)　α が $0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，点 P_α の描く曲線を C とする。C 上の点 P_α における接線が L_α であることを示し，C の概形を図示せよ。

4　ある駐車場には 4 つの駐車枠 A，B，C，D が，アルファベット順に 1 列に並んでいる。そして自動車は，4 台が順に入場して，空いている枠に次の確率で駐車する。

（i）　B と C のうち先着の自動車が隣の枠に駐車している枠，および D には，等しい確率で駐車する

（ii）　A に駐車する確率，および B と C のうち両隣が空いている枠に駐車する確率は，(i) の確率の 3 倍である

このとき，次の確率を求めよ。ただし，1 台目の自動車が入場するときには，4 つの枠はすべて空いている。

(1)　1 台目の自動車が A に駐車する確率

(2)　3 台目の自動車が入場したとき，B と D に自動車が駐車している確率

(3)　4 台目の自動車が入場したとき，C に自動車が駐車していない確率

2017年度　旭川医科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）$\mathrm{P}_n(n-1,\ e^{-n+1})$　（2）$\mathrm{Q}_n\left(n-\dfrac{1}{e-1},\ \dfrac{e^{-n+1}}{e-1}\right)$　（3）$\dfrac{e^2-3e+1}{2(e-1)^2}$

2

（1）$a=\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{3}{2}$，$c=\dfrac{1}{2}$，$\alpha=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$\beta=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

（2）図示は省略

（3）図示は省略，$\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\leqq|w_1-w_2|<\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}$

3

（1）$y=-(\tan\theta)x+\sin\theta$

（2）$\cos\alpha=t^{\frac{1}{3}}$

（3）P_α の直交座標：$(\cos^3\alpha,\ \sin^3\alpha)$，$\mathrm{P}_\alpha$ の極座標：$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$

（4）証明は省略，図示は省略

4

（1）$\dfrac{3}{10}$　（2）$\dfrac{18}{175}$　（3）$\dfrac{87}{350}$