

2017年度 新潟大学 (前期)

医学部

試験時間：90 分

📖 全問必答

1 座標空間内に次のような4点 A, B, C, D を考える。A の座標は $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$, 3点 B, C, D は、それぞれ x 軸, y 軸, z 軸上にある。さらに、これらの4点は同一平面上にあり、四角形 ABCD は平行四辺形である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 3点 B, C, D の座標を求めよ。
- (2) 平行四辺形 ABCD の面積を求めよ。
- (3) 原点 O から平行四辺形 ABCD を含む平面に垂線 OH を下ろす。点 H の座標を求めよ。

2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = \frac{1}{3}, a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n + 3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ。

- (1) a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ。
- (2) 一般項 a_n を推測して、その結果を数学的帰納法によって証明せよ。
- (3) 不等式 $a_n > 1 - 10^{-18}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

3 t は、 $t > \frac{1}{2}$ を満たす実数とする。座標平面上に楕円 $x^2 + 4y^2 = 1$ が与えられている。点 $P(-1, -t)$ からこの楕円に引いた接線のうちで y 軸と平行でない接線を l , その接点を $Q(a, b)$ とする。また、 x 軸, y 軸および接線 l で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 $Q(a, b)$ における接線 l の方程式は、 $ax + 4by = 1$ であることを示せ。
- (2) a, b を、それぞれ t を用いて表せ。
- (3) 面積 $S(t)$ を、 t を用いて表せ。
- (4) 極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t}$ を求めよ。

4 $f(x) = xe^{1-x^2}$ とする。2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = x^k$ で囲まれた部分の面積を S_k とする。ただし、 k は自然数とする。次の問いに答えよ。必要があれば

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x^2} = 0$$

が成り立つことを用いてよい。

- (1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ の極値, グラフの凹凸と変曲点, および漸近線を求め, グラフの概形をかけ。
- (3) S_k を, k を用いて表せ。
- (4) 次の条件 (*) を満たす最小の自然数 n を求めよ。

(*) すべての自然数 m に対して, $4S_{2m-1} > 7S_{2m}$ が成り立つ。

2017年度 新潟大学 (前期)

医学部

(略解)

☞ 証明, 図示などは省略

1

(1) $B(\sqrt{2}, 0, 0), C(0, -\sqrt{3}, 0), D(0, 0, \sqrt{6})$

(2) 6

(3) $H\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

2

(1) $a_2 = \frac{3}{5}, a_3 = \frac{7}{9}, a_4 = \frac{15}{17}, a_5 = \frac{31}{33}$

(2) $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$, 証明は省略

(3) $n = 61$

3

(1) 証明は省略

(2) $a = \frac{4t^2 - 1}{4t^2 + 1}, b = -\frac{2t}{4t^2 + 1}$

(3) $S(t) = \frac{(4t^2 + 1)^2}{16t(4t^2 - 1)}$

(4) $\frac{1}{4}$

4

(1) $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}, f''(x) = 2x(2x^2 - 3)e^{1-x^2}$

(2) 極大値: $\sqrt{\frac{e}{2}} \left(x = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, 極小値: $-\sqrt{\frac{e}{2}} \left(x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

変曲点: $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2e}}\right), (0, 0), \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2e}}\right)$

漸近線: $y = 0$, 図示は省略

(3) $S_k = \begin{cases} \frac{e-1}{2} - \frac{1}{k+1} & (k \text{ が偶数のとき}) \\ e-1 - \frac{2}{k+1} & (k \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$

(4) $n = 5$