

2017年度 島根大学（前期）**医学部**

試験時間：120 分

 全問必答

1 4つの箱 X, Y, Z, W と2つの玉がある。最初、箱 X, Y には玉が1つずつ入っており、箱 Z, W には玉が入っていないとする。この状態から始めて、次の操作を繰り返し行う。

「2つの玉のうち1つを無作為に選び、それを、その時点で玉が入っていない2つの箱のいずれか1つに無作為に移動する。」

この操作を n 回繰り返したとき、X と Y に入っている玉の個数の合計を A_n とする。例えば、操作を n 回繰り返したとき、最初の状態に戻ったならば、 $A_n = 2$ である。

A_n が偶数である確率を p_n , A_n が奇数である確率を q_n とする。次の問いに答えよ。

- (1) p_1, q_1, p_2, q_2 を求めよ。
- (2) p_{n+1}, q_{n+1} を p_n, q_n を用いて表せ。
- (3) q_n を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

- (1) 直線 $y = mx + n$ が楕円 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ に接するための条件を m, n を用いて表せ。
- (2) 点 $(2, 1)$ から楕円 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ に引いた2つの接線が直交することを示せ。
- (3) 楕円 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ の直交する2つの接線の交点の軌跡を求めよ。

3 $\triangle ABC$ において、 $\angle A, \angle B, \angle C$ の大きさをそれぞれ A, B, C とする。 $\tan A, \tan B, \tan C$ がすべて整数で、 $A < B < C$ であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\tan(B + C)$ を $\tan A$ を用いて表せ。
- (2) $C < 90^\circ$ を示せ。
- (3) $\tan A, \tan B, \tan C$ の組をすべて求めよ。

4 関数 $f(x) = e^{-x} \sin x$ について、次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

- (1) $0 \leq x \leq 2\pi$ とする。関数 $y = f(x)$ の増減、極値、グラフの凹凸および変曲点を調べ、そのグラフの概形をかけ。
- (2) n を自然数とすると、 $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |f(x)| dx$ を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} |f(x)| dx$ を求めよ。

2017年度 島根大学 (前期)**医学部**

(略解)

 証明, 図示などは省略**1**

(1) $p_1 = 0, q_1 = 1, p_2 = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{2}$

(2)
$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{2}q_n \\ q_{n+1} = p_n + \frac{1}{2}q_n \end{cases}$$

(3) $q_n = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$

2

(1) $m^2 - n^2 + 4 = 0$

(2) 証明は省略

(3) 円: $x^2 + y^2 = 5$

3

(1) $\tan(B+C) = -\tan A$

(2) 証明は省略

(3) $(\tan A, \tan B, \tan C) = (1, 2, 3)$

4

(1) 極大値: $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$, 極小値: $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5}{4}\pi}$,
変曲点: $\left(\frac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}}\right), \left(\frac{3}{2}\pi, -e^{-\frac{3}{2}\pi}\right)$, 図示は省略

(2) $\frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1)e^{-\pi(n-1)}$

(3) $\frac{e^{\pi} + 1}{2(e^{\pi} - 1)}$