2017 年度　千葉大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2 \cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OA_2}$，$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OA_3}$，$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{OA_4}$ とし，$k = 2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t : 1-t$ に内分するとする。

(1)　$\overrightarrow{a}$ および $\overrightarrow{d}$ を，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$，k を用いて表せ。

(2)　t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2} \leqq t < \dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3)　不等式 $\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4} > \dfrac{1}{12}$ を示せ。

2　1 個のさいころを 3 回投げて，以下のルールで各回の得点を決める。

- 1 回目は，出た目が得点になる。
- 2 回目は，出た目が 1 回目と同じならば得点は 0，異なれば出た目が得点になる。
- 3 回目は，出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0，どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3 回の得点の和を総得点とし，総得点が n となる確率を p_n とする。

(1)　総得点 n の最大値，最小値と，それらの n に対する p_n を求めよ。

(2)　p_6 を求めよ。

(3)　p_n が最大となるような n と，そのときの p_n を求めよ。

3　複素数平面上の点 z $\left(z \neq -\dfrac{i}{2}\right)$ に対して，$w = \dfrac{z+2i}{2z+i}$ とする。

(1)　点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

(2)　点 z が点 α を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w は原点を中心とする半径 r の円周を描く。このような r と α の組をすべて求めよ。

4　数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　a_5 を求めよ。

(2)　a_{n+1} を a_n の式で表せ。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ が収束することを示し，その和を求めよ。

5　曲線 C は曲線 $y=-e^x$ を平行移動したものとする。C と曲線 $y=e^{-x}$ は x 座標が t（$t \geqq 0$）である点を共有し，その点で共通の接線を持つとする。C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

(1)　C の方程式を求めよ。

(2)　$S(t)$ を求めよ。

(3)　$S(t)$ が最大となるような t の値がただ 1 つ存在することを示せ。

(4)　$S(t)$ が最大となるような t の値を α とすると，$\alpha > \log\dfrac{12}{5}$ であり，$S(\alpha) < \dfrac{95}{144}$ となることを示せ。必要ならば $\log\dfrac{24}{5} < 1.57$ を用いてもよい。

2017年度　千葉大学（前期）

医学部　（略解）

✎ 証明，図示などは省略

1

(1)　$\vec{a} = k\vec{b} - \vec{c}$，$\vec{d} = k\vec{c} - \vec{b}$

(2)　$t = \dfrac{k+1}{k+2}$，証明は省略

(3)　証明は省略

2

(1)　最大値：15，$p_{15} = \dfrac{1}{36}$，最小値：1，$p_1 = \dfrac{1}{216}$

(2)　$p_6 = \dfrac{19}{216}$

(3)　$n = 9$，$p_9 = \dfrac{5}{36}$

3

(1)　原点中心，半径 1 の円

(2)　$(r,\ \alpha) = (1,\ 0),\ \left(\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{5}{2}i\right)$

4

(1)　$a_5 = 1807$

(2)　$a_{n+1} = a_n(a_n - 1) + 1$

(3)　証明は省略，1

5

(1)　$y = -e^{x-2t} + 2e^{-t}$

(2)　$S(t) = 2(t - 1 + \log 2)e^{-t} + e^{-2t}$

(3)　証明は省略

(4)　証明は省略