2017 年度　京都大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　w を 0 でない複素数，$x,\ y$ を $w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ を満たす実数とする。

(1)　実数 R は $R>1$ を満たす定数とする。w が絶対値 R の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ。

(2)　実数 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。w が偏角 α の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ。

2　四面体 OABC を考える。点 D，E，F，G，H，I は，それぞれ辺 OA，AB，BC，CO，OB，AC 上にあり，頂点ではないとする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が平行ならば $\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=\mathrm{CF}:\mathrm{FB}$ であることを示せ。

(2)　D，E，F，G，H，I が正八面体の頂点となっているとき，これらの点は OABC の各辺の中点であり，OABC は正四面体であることを示せ。

3　$p,\ q$ を自然数，$\alpha,\ \beta$ を

$$\tan\alpha=\frac{1}{p},\quad \tan\beta=\frac{1}{q}$$

を満たす実数とする。このとき

$$\tan(\alpha+2\beta)=2$$

を満たす $p,\ q$ の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

4　$\triangle\mathrm{ABC}$ は鋭角三角形であり，$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$ であるとする。また $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径は 1 であるとする。

(1)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の内心を P とするとき，$\angle\mathrm{BPC}$ を求めよ。

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円の半径 r の取りうる値の範囲を求めよ。

5　$a\geqq 0$ とする。$0\leqq x\leqq\sqrt{2}$ の範囲で曲線 $y=xe^{-x}$，直線 $y=ax$，直線 $x=\sqrt{2}$ によって囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。このとき，$S(a)$ の最小値を求めよ。（ここで，「囲まれた部分」とは，上の曲線または直線のうち 2 つ以上で囲まれた部分を意味するものとする。）

6　n を自然数とする。n 個の箱すべてに，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている。各々の箱から 1 枚ずつカードを取り出し，取り出した順に左から並べて n 桁の数 X を作る。このとき，X が 3 で割り切れる確率を求めよ。

2017年度　京都大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　楕円：$\dfrac{x^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$

(2)　双曲線：$\dfrac{x^2}{\cos^2\alpha}-\dfrac{y^2}{\sin^2\alpha}=4,\ x \geqq 2\cos\alpha$

2

(1)　証明は省略

(2)　証明は省略

3　$(p,\ q)=(2,\ 3)$

4

(1)　$\angle\mathrm{BPC}=\dfrac{2}{3}\pi$

(2)　$\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)<r \leqq \dfrac{1}{2}$

5　最小値：$-\dfrac{4}{e}+1+(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}$

6　$\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n$