# 2016 年度　筑波大学（前期）

## 医学部　試験時間：120 分

**1**～**3** は必答
**4**～**6** から 2 問選択

**1**　$k$ を実数とする。$xy$ 平面の曲線 $C_1 : y = x^2$ と $C_2 : y = -x^2 + 2kx + 1 - k^2$ が異なる共有点 P, Q を持つとする。ただし点 P，Q の $x$ 座標は正であるとする。また，原点を O とする。

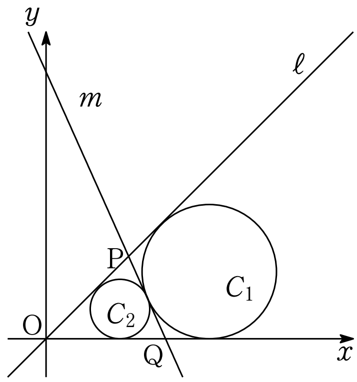
(1)　$k$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$k$ が (1) の範囲を動くとき，△OPQ の重心 G の軌跡を求めよ。

(3)　△OPQ の面積を $S$ とするとき，$S^2$ を $k$ を用いて表せ。

(4)　$k$ が (1) の範囲を動くとする。△OPQ の面積が最大となるような $k$ の値と，そのときの重心 G の座標を求めよ。

**2**　$xy$ 平面の直線 $y = (\tan 2\theta)x$ を $\ell$ とする。ただし $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ とする。図で示すように，円 $C_1$，$C_2$ を以下の (i)～(iv) で定める。




(i)　円 $C_1$ は直線 $\ell$ および $x$ 軸の正の部分と接する。

(ii)　円 $C_1$ の中心は第 1 象限にあり，原点 O から中心までの距離 $d_1$ は $\sin 2\theta$ である。

(iii)　円 $C_2$ は直線 $\ell$，$x$ 軸の正の部分，および円 $C_1$ と接する。

(iv)　円 $C_2$ の中心は第 1 象限にあり，原点 O から中心までの距離 $d_2$ は $d_1 > d_2$ を満たす。

円 $C_1$ と円 $C_2$ の共通接線のうち，$x$ 軸，直線 $\ell$ と異なる直線を $m$ とし，直線 $m$ と直線 $\ell$，$x$ 軸との交点をそれぞれ P，Q とする。

(1)　円 $C_1$，$C_2$ の半径を $\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ。

(2)　$\theta$ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くとき，線分 PQ の長さの最大値を求めよ。

(3)　(2) の最大値を与える $\theta$ について直線 $m$ の方程式を求めよ。

**3**　四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく。このとき等式

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1$$

が成り立つとする。$t$ は実数の定数で，$0<t<1$ を満たすとする。線分 OA を $t : 1-t$ に内分する点を P とし，線分 BC を $t : 1-t$ に内分する点を Q とする。また，線分 PQ の中点を M とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と $t$ を用いて表せ。

(2)　線分 OM と線分 BM の長さが等しいとき，線分 OB の長さを求めよ。

(3)　4 点 O，A，B，C が点 M を中心とする同一球面上にあるとする。このとき，△OAB と △OCB は合同であることを示せ。

**4**　関数 $f(x)=2\sqrt{x}e^{-x}$（$x \geqq 0$）について次の問いに答えよ。

(1)　$f'(a)=0, f''(b)=0$ を満たす $a, b$ を求め，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け。ただし，$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}e^{-x}=0$ であることは証明なしで用いてよい。

(2)　$k \geqq 0$ のとき $V(k)=\int_0^k xe^{-2x}\,dx$ を $k$ を用いて表せ。

(3)　(1) で求めた $a$，$b$ に対して曲線 $y=f(x)$ と $x$ 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形を $x$ 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

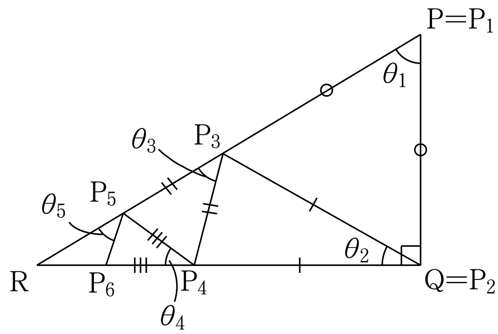
**5**　△PQR において ∠RPQ $=\theta$，∠PQR $=\dfrac{\pi}{2}$ とする。
点 $\mathrm{P}_n$（$n=1$，2，3，…）を次で定める。

$$\mathrm{P}_1=\mathrm{P},\ \mathrm{P}_2=\mathrm{Q},\ \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+2}=\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$$

ただし，点 $\mathrm{P}_{n+2}$ は線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{R}$ 上にあるものとする。
実数 $\theta_n$（$n=1$，2，3，…）を

$$\theta_n=\angle \mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+2}\quad (0<\theta_n<\pi)$$

で定める。




(1)　$\theta_2$，$\theta_3$ を $\theta$ を用いて表せ。

(2)　$\theta_{n+1}+\dfrac{\theta_n}{2}$　（$n=1$，2，3，…）は $n$ によらない定数であることを示せ。

(3)　$\lim_{n\to\infty}\theta_n$ 求めよ。

**6**　複素数平面上を動く点 $z$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　等式 $|z-1|=|z+1|$ を満たす点 $z$ の全体は虚軸であることを示せ。

(2)　点 $z$ が原点を除いた虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z}$ が描く図形は直線から 1 点を除いたものとなる。この図形を描け。

(3)　$a$ を正の実数とする。点 $z$ が虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z-a}$ が描く図形は円から 1 点を除いたものとなる。この円の中心と半径を求めよ。

# 2016年度　筑波大学（前期）

## 医学部 （略解）

証明，図示などは省略

**1**

（1）　$1<k<\sqrt{2}$

（2）　線分：$y=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$

（3）　$S^2=\dfrac{1}{16}(k^2-1)^2(2-k^2)$

（4）　$k=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$，$\mathrm{G}\left(\dfrac{\sqrt{15}}{9},\ \dfrac{1}{3}\right)$

**2**

（1）　$C_1$ の半径：$2\sin^2\theta\cos\theta$，$C_2$ の半径：$\dfrac{2\sin^2\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}$

（2）　最大値：$\dfrac{16}{27}$

（3）　$y=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+\dfrac{2\sqrt{5}}{9}$

**3**

（1）　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{t\,\vec{a}+(1-t)\,\vec{b}+t\,\vec{c}}{2}$

（2）　$\sqrt{2}$

（3）　証明は省略

**4**

（1）　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$，図示は省略

（2）　$V(k)=-\dfrac{2k+1}{4}e^{-2k}+\dfrac{1}{4}$

（3）　$\pi\left\{\dfrac{2}{e}-(2+\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}\right\}$

**5**

（1）　$\theta_2=\dfrac{\theta}{2}$，$\theta_3=\dfrac{3}{4}\theta$

（2）　証明は省略

（3）　$\dfrac{2}{3}\theta$

**6**

（1）　証明は省略

（2）　図示は省略

（3）　中心：$\dfrac{a-1}{2a}$，半径：$\dfrac{a+1}{2a}$