2016 年度　東京大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　e を自然対数の底，すなわち $e=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

2　A，B，C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a)　1 試合目で A と B が対戦する。

(b)　2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c)　k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1)　n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2)　m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき，A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ。

3　a を $1<a<3$ をみたす実数とし，座標空間内の 4 点 $\mathrm{P}_1(1,0,1)$, $\mathrm{P}_2(1,1,1)$, $\mathrm{P}_3(1,0,3)$, $\mathrm{Q}(0,0,a)$ を考える。直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}$，$\mathrm{P}_2\mathrm{Q}$，$\mathrm{P}_3\mathrm{Q}$ と xy 平面の交点をそれぞれ R_1，R_2，R_3 として，三角形 $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3$ の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を最小にする a と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ。

4　z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め，図示せよ。

5　k を正の整数とし，10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる。ここで，a_1, a_2, $\cdots$, a_k は 0 から 9 までの整数で，$a_k\neq 0$ とする。

(1)　次の不等式をみたす正の整数 n をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{n}-10^k<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(2)　p が $5\cdot 10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式をみたす正の整数 m が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{m}-p<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(3)　実数 x に対し，$r\leqq x<r+1$ をみたす整数 r を $[x]$ で表す。$\sqrt{s}-\left[\sqrt{s}\right]=0.a_1a_2\cdots a_k$ をみたす正の整数 s は存在しないことを示せ。

6　座標空間内を，長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件 (a)，(b) をみたしながら動く。

(a)　点 A は平面 $z=0$ 上にある。

(b)　点 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ が線分 AB 上にある。

このとき，線分 AB が通過することのできる範囲を K とする。K と不等式 $z \geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ。

2016年度　東京大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1 証明は省略

2

(1) $\begin{cases} 0 & (n=3k \text{ と表せるとき}) \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^n & (n=3k\pm1 \text{ と表せるとき}) \end{cases}$　　(2) $\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^{m-1}}{5-12\left(\dfrac{1}{8}\right)^m}$

3 $a=2$，$S(a)=4$

4 図示は省略

5

(1) $n=10^{2k}+2\cdot10^k\cdot A+1$，$n=10^{2k}+2\cdot10^k\cdot A+2$

ただし，$A=\dfrac{a_1}{10}+\dfrac{a_2}{10^2}+\cdots+\dfrac{a_k}{10^k}$

(2) 証明は省略　　(3) 証明は省略

6 $\pi\left(\dfrac{17}{3}-8\log 2\right)$