

2016年度 旭川医科大学（前期）

医学部

試験時間：120 分

 全問必答

1 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\tan x \leq x + 1 - \frac{\pi}{4}$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) が成り立つことを示せ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めよ。
- (3) $I_n + I_{n+2}$ の値を n を用いて表せ。
- (4) (3) までの結果を用いて、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ の和を求めよ。

2 原点 O を中心とする単位円周上に $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, および $y > 0$ を満たす動点 $C(x, y)$ がある。 $\angle BAC = \theta$ とするとき、次の問いに答えよ。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

- (1) $\triangle ABC$ の面積を θ を用いて表せ。
- (2) $\triangle ABC$ の内接円 O_1 の半径 r_1 を θ を用いて表せ。
- (3) x 軸、辺 AC の延長線、および辺 BC とそれぞれ接する円 O_2 を考える。 x 軸上の接点を D 、辺 AC の C 側の延長上の接点を E 、そして辺 BC 上の接点を F とする。
 - (i) AD の長さを θ を用いて表せ。
 - (ii) 円 O_2 の半径 r_2 を θ を用いて表せ。
 - (iii) 円 O_1 の中心を I 、円 O_2 の中心を J とする。 $\frac{r_2}{r_1} = 2$ となるとき、 $\triangle OIJ$ の面積を求めよ。

3 a を正の実数とする。点 P は曲線 $C_a : y = e^{ax}$ 上を、点 Q は直線 $y = x$ をそれぞれ動く。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C_a と直線 $y = x$ が共有点をもたないような a の値の範囲を求めよ。
- (2) (1) で求めた範囲にある a に対して、線分 PQ の長さの最小値を $d(a)$ とする。 PQ の長さが $d(a)$ となる曲線 C_a 上の点を P_a とする。
 - (i) $d(a)$ を求めよ。
 - (ii) 点 P_a における曲線 C_a の接線の傾きを求めよ。
 - (iii) a が (1) で求めた範囲を動くときの点 P_a の軌跡を求め、その概形を図示せよ。
- (3) $d(a)$ の最大値と、そのときの a の値を求めよ。

4 A の袋には赤玉 5 個，白玉 1 個が入っている。B の袋には赤玉 2 個，白玉 2 個が入っている。この 2 つの袋は見た目では区別できないものとする。このとき，次の確率を求めよ。

- (1) 2 つの袋からそれぞれ 2 個ずつ，合計 4 個の玉を取り出すとき，赤玉が 3 個以上である確率
- (2) どちらか一方の袋を選んで 1 個の玉を取り出すとき，それが赤玉である確率
- (3) どちらか一方の袋を選んで 2 個の玉を取り出すとき，1 個でも白玉があれば「袋 B を選んだ」と判断する。袋 A を選んで取り出したときに「袋 B を選んだ」と判断してしまう確率

2016年度 旭川医科大学（前期）**医学部**

（略解）

☞ 証明，図示などは省略

1

- (1) 証明は省略 (2) 0 (3) $\frac{1}{n+1}$ (4) $\frac{1}{2} \log 2$

2

- (1) $\sin 2\theta$
(2) $\cos \theta + \sin \theta - 1$
(3) (i) $AD = 1 + \cos \theta + \sin \theta$ (ii) $r_2 = 1 - \cos \theta + \sin \theta$ (iii) $\frac{1}{5}$

3

- (1) $a > e^{-1}$
(2) (i) $d(a) = \frac{\log a + 1}{\sqrt{2a}}$ (ii) 1 (iii) $x = y \log y$ ($0 < y < e$), 図示は省略
(3) 最大値: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($a = 1$)

4

- (1) $\frac{11}{18}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{1}{3}$