2016 年度　大阪大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　1 以上 6 以下の 2 つの整数 a，b に対し，関数 $f_n(x)$（$n=1$，2，3，$\cdots$）を次の条件 (ア)，(イ)，(ウ) で定める。

(ア)　$f_1(x)=\sin(\pi x)$

(イ)　$f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-x\right)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(ウ)　$f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

以下の問いに答えよ。

(1)　$a=2$，$b=3$ のとき，$f_5(0)$ を求めよ。

(2)　$a=1$，$b=6$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(-1)^k f_{2k}(0)$ を求めよ。

(3)　1 個のさいころを 2 回投げて，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b とするとき，$f_6(0)=0$ となる確率を求めよ。

2　次の問いに答えよ。

(1)　c を正の定数とする。正の実数 x，y が $x+y=c$ をみたすとき，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$$

の最小値を c を用いて表せ。

(2)　正の実数 x，y，z が $x+y+z=1$ をみたすとき，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{4}{3z}\right)$$

の最大値を求めよ。

3　座標平面において，原点 O を中心とする半径 r の円と放物線 $y=\sqrt{2}(x-1)^2$ は，ただ 1 つの共有点 (a,b) をもつとする。

(1)　a，b，r の値をそれぞれ求めよ。

(2)　連立不等式

$$a \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{2}(x-1)^2,\ x^2+y^2 \geqq r^2$$

の表す領域を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

4　正の整数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

とおき，1 以上 n 以下のすべての奇数の積を A_n とする。

(1)　$\log_2 n$ 以下の最大の整数を N とするとき，$2^N A_n S_n$ は奇数の整数であることを示せ。

(2)　$S_n = 2 + \dfrac{m}{20}$ となる正の整数の組 $(n,\ m)$ をすべて求めよ。

(3)　整数 a と $0 \leqq b < 1$ をみたす実数 b を用いて，

$$A_{20}S_{20} = a + b$$

と表すとき，b の値を求めよ。

5　円上の 5 点 A，B，C，D，E は反時計回りにこの順に並び，円周を 5 等分している。5 点 A，B，C，D，E を頂点とする正五角形を R_1 とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{c}$ とおき，$\vec{a}$ の大きさを x とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の大きさを y とするとき，$x^2 = y(y - x)$ がなりたつことを示せ。

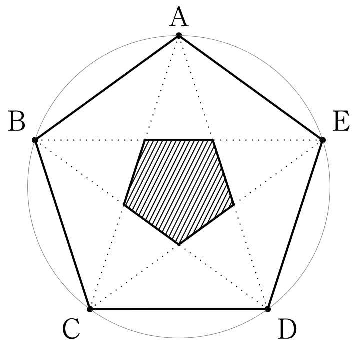
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3)　R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする。R_2 の一辺の長さを x を用いて表せ。

(4)　$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし，R_n の面積を S_n とする。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k$$

を求めよ。



斜線部分が R_2

2016 年度　大阪大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（2）$\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}$　　（3）$\dfrac{2}{9}$

2

（1）$\left(1+\dfrac{2}{c}\right)^2$

（2）$-\dfrac{125}{3}$　$(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$

3

（1）$a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{\sqrt{2}}{4},\ c=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

（2）$\left(\dfrac{19}{120}-\dfrac{\sqrt{6}}{16}\right)\pi$

4

（1）証明は省略　　（2）$(n,\ m)=(6,\ 9)$　　（3）$b=\dfrac{13}{16}$

5

（1）証明は省略

（2）$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}(\vec{a}+\vec{c})$

（3）$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}x$

（4）$\dfrac{3+\sqrt{5}}{6}$