

2016年度 名古屋大学 (前期)**医学部**

試験時間：150 分

 全問必答

1 曲線 $y = x^2$ 上に 2 点 $A(-2, 4)$, $B(b, b^2)$ をとる。ただし $b > -2$ とする。このとき、次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件： $y = x^2$ 上の点 $T(t, t^2)$ ($-2 < t < b$) で、 $\angle ATB$ が直角になるものが存在する。

2 2 つの円 $C : (x-1)^2 + y^2 = 1$ と $D : (x+2)^2 + y^2 = 7^2$ を考える。また原点を $O(0, 0)$ とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 円 C 上に、 y 座標が正であるような点 P をとり、 x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。このとき、点 P の座標と線分 OP の長さを θ を用いて表せ。
- (2) (1) でとった点 P を固定したまま、点 Q が円 D 上を動くとき、 $\triangle OPQ$ の面積が最大になるときの Q の座標を θ を用いて表せ。
- (3) 点 P が円 C 上を動き、点 Q が円 D 上を動くとき、 $\triangle OPQ$ の面積の最大値を求めよ。ただし (2), (3) においては、3 点 O, P, Q が同一直線上にあるときは、 $\triangle OPQ$ の面積は 0 であるとする。

3 玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A, B があるとき、袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ、次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる、という操作を 1 回の操作と数えることにする。 A に赤玉が 2 個、 B に白玉が 2 個入った状態から始め、この操作を n 回繰り返した後に袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) $k = 0, 1, 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ。
- (2) $k = 0, 1, 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ。

4 次の問に答えよ。ただし 2 次方程式の重解は 2 つと数える。

- (1) 次の条件 (*) を満たす整数 a, b, c, d, e, f の組をすべて求めよ。

$$(*) \begin{cases} 2 \text{ 次方程式 } x^2 + ax + b = 0 \text{ の 2 つの解が } c, d \text{ である。} \\ 2 \text{ 次方程式 } x^2 + cx + d = 0 \text{ の 2 つの解が } e, f \text{ である。} \\ 2 \text{ 次方程式 } x^2 + ex + f = 0 \text{ の 2 つの解が } a, b \text{ である。} \end{cases}$$

- (2) 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は、次の条件 (**) を満たすとする。

(**) すべての正の整数 n について、 a_n, b_n は整数であり、2 次方程式 $x^2 + a_n x + b_n = 0$ の 2 つの解が a_{n+1}, b_{n+1} である。

このとき、

- (i) 正の整数 m で、 $|b_m| = |b_{m+1}| = |b_{m+2}| = \dots$ となるものが存在することを示せ。
- (ii) 条件 (**) を満たす数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の組をすべて求めよ。

2016年度 名古屋大学 (前期)**医学部**

(略解)

 証明, 図示などは省略

1 $\frac{2-\sqrt{2}}{2} < b$

2

(1) $P(2\cos^2\theta, 2\sin\theta\cos\theta), OP = 2\cos\theta$

(2) $Q(-2-7\sin\theta, 7\cos\theta)$

(3) $\frac{15\sqrt{15}}{8}$

3

(1) $P_1(0) = \frac{1}{3}, P_1(1) = \frac{2}{3}, P_1(2) = 0$

(2) $P_n(0) = \frac{1}{6} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\}, P_n(1) = \frac{2}{3}, P_n(2) = \frac{1}{6} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\}$

4

(1) $(a, b, c, d, e, f) = (0, 0, 0, 0, 0, 0), (1, -2, 1, -2, 1, -2)$

(2) (i) 証明は省略

(ii) $(a_n, b_n) = (a_1(-1)^{n-1}, 0), (1, -2) \quad (a_1 \text{ は整数})$