2015 年度　旭川医科大学（前期）

医学部　試験時間：120 分　　全問必答

1　$f(p,\,q,\,r) = p^3 - q^3 - 27r^3 - 9pqr$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(p,\,q,\,r)$ を因数分解せよ。

(2)　等式 $f(p,\,q,\,r) = 0$ と $p^2 - 10q - 30r = 11$ との両方を満たす正の整数の組 $(p,\,q,\,r)$ をすべて求めよ。

2　n を正の整数とする。$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ の範囲で関数 $f(x) = x\sin x$ を考える。関数 $f(x)$ が極大値をとる x を a_n とし，曲線 $y = f(x)$ の変曲点を $(b_n,\,f(b_n))$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　a_n と b_n はそれぞれ唯(ただ)1 つあって，$2n\pi < b_n < 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} < a_n < (2n+1)\pi$ を満たすことを示せ。

(2)　以下の極限を求めよ。

(i)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - 2n\pi)$　　(ii)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(b_n - 2n\pi)$　　(iii)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(b_n)$

(3)　曲線 $y = f(x)$　$(2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi)$ と x 軸とで囲まれた図形を，3 つの直線 $x = b_n$，$x = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$，$x = a_n$ によって 4 つの部分に分ける。その面積を左から順に S_1，S_2，S_3，S_4 とするとき，$(S_3 + S_4) - (S_1 + S_2)$ の値を求めよ。

(4)　以下の極限を求めよ。

(i)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_1$　　(ii)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_3$　　(iii)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_4 - S_2)$

3　曲線 $C : y = \sin^2 x$ について，C 上の点 $(t,\,\sin^2 t)$　$\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ における C の接線と直線 $x = a$ との交点を P とする。ただし，a は $0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 P の y 座標を $f(t)$ とおくとき，$f(t)$ を求めよ。

(2)　関数 $f(t)$ の増減を調べ，その最大値と最小値を求めよ。

(3)　t が $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，点 $(t,\,\sin^2 t)$ における C の接線が通るすべての点のうち，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ となるものの範囲を xy 平面に図示せよ。

4　四面体 OAPQ において，$\angle\mathrm{AOP} = \angle\mathrm{AOQ} = \angle\mathrm{POQ} = 60^\circ$，$\mathrm{OA} = 1$，$\mathrm{OP} = p$，$\mathrm{OQ} = q$ とし，頂点 A から平面 OPQ に下ろした垂線を AH とする。ただし，$p \leqq q$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を p，q を用いて表せ。

(2)　AH の長さを求めよ。

(3)　$p + q = 3$，および $\triangle\mathrm{APQ}$ の面積が 1 のとき，以下の値を求めよ。

(i)　pq　　(ii)　p　　(iii)　四面体 OAPQ の体積

2015 年度　旭川医科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$(p-q-3r)(p^2+q^2+9r^2+pq+3pr-3qr)$

(2)　$(p,\ q,\ r)=(11,\ 8,\ 1),\ (11,\ 5,\ 2),\ (11,\ 2,\ 3)$

2

(1)　証明は省略　　(2)　(i)　$\dfrac{\pi}{2}$　(ii)　0　(iii)　2

(3)　$\pi-2$　　(4)　(i)　0　(ii)　1　(iii)　$\pi-3$

3

(1)　$f(t)=(a-t)\sin 2t+\sin^2 t$

(2)　最大値：$\begin{cases} 1 & \left(0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi+2}{4}\right) \\ a-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2} & \left(\dfrac{\pi+2}{4} \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$　最小値：$\begin{cases} a-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2} & \left(0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi-2}{4}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{\pi-2}{4} \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

(3)　図示は省略

4

(1)　$\dfrac{pq}{2}-\dfrac{p+q}{2}+1$

(2)　$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(3)　(i)　$pq=1$　(ii)　$p=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$　(iii)　$\dfrac{\sqrt{2}}{12}$