2015 年度　大阪大学（前期）

医学部　　試験時間：150 分

全問必答

1　自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\frac{x}{n}\right) \quad (x \geqq 0)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$\displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx \leqq \int_0^1 \log(1+x)\,dx$ を示せ。

(2)　数列 $\{I_n\}$ を

$$I_n = \int_0^n f_n(x)\,dx$$

で定める。$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $\log(1+x) \leqq \log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$ であることは用いてよい。

2　実数 x，y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき，不等式

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

が成り立つことを示せ。

3　以下の問いに答えよ。

(1)　$\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{3}$ が無理数であることを示せ。

(2)　p，q，$\sqrt{2}p + \sqrt[3]{3}q$ がすべて有理数であるとする。そのとき，$p = q = 0$ であることを示せ。

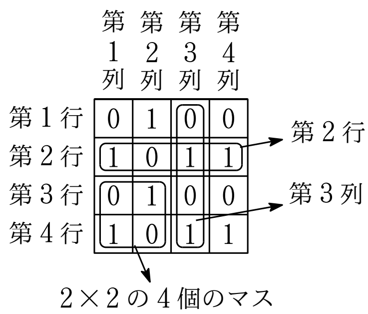
4　座標空間の x 軸上に動点 P，Q がある。P，Q は時刻 0 において，原点を出発する。P は x 軸の正の方向に，Q は x 軸の負の方向に，ともに速さ 1 で動く。その後，ともに時刻 1 で停止する。点 P，Q を中心とする半径 1 の球をそれぞれ A，B とし，空間で $x \geqq -1$ の部分を C とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　時刻 t（$0 \leqq t \leqq 1$）における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ。

(2)　$V(t)$ の最大値を求めよ。

5　n を 2 以上の整数とする。正方形の形に並んだ $n \times n$ のマスに 0 または 1 のいずれかの数字を入れる。マスは上から第 1 行，第 2 行，…，左から第 1 列，第 2 列，…，と数える。数字の入れ方についての次の条件 p を考える。

条件 p：1 から $n-1$ までのどの整数 i，j についても，第 i 行，第 $i+1$ 行と第 j 列，第 $j+1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには 0 と 1 が 2 つずつ入る。



（$n=4$ の場合の入れ方の例）

(1)　条件 p を満たすとき，第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れることを示せ。

(2)　条件 p を満たすような数字の入れ方の総数 a_n を求めよ。

2015 年度　大阪大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）　証明は省略　（2）　証明は省略。$2\log 2-1$

2　証明は省略

3

（1）　証明は省略　（2）　証明は省略

4

（1）　$V(t)=\pi\left(-\dfrac{t^3}{3}-t^2+2t+\dfrac{4}{3}\right)$　（2）　$\pi\left(-\dfrac{4}{3}+2\sqrt{3}\right)$

5

（1）　証明は省略　（2）　$a_n=2^{n+1}-2$